BORIS APSEN

REPETITORIJ ELEMENTARNE MATEMATIKE

TEHNIČKA · KNJIGA · ZAGREB

Znak: 7703 S

Izdanje:

Prof. dr ing. BORIS APSEN

REPETITORIJ ELEMENTARNE MATEMATIKE

Izdavač:

TEHNIČKA KNJIGA, izdavačko poduzeće

OOUR IZDAVAČKA DJELATNOST

ZAGREB, Jurišićeva 10.

Za izdavača:

Glavni urednik ing. ZVONIMIR VISTRIČKA

Tisak:

ŠTAMPARIJA »OBOD«, CETINJE

Tisak dovršen:

U SVIBNJU 1977.

PROF. DR ING. BORIS APSEN

REPETITORIJ ELEMENTARNE MATEMATIKE

ARITMETIKA, ALGEBRA, GEOMETRIJA
(PLANIMETRIJA I STEREOMETRIJA)
GONIOMETRIJA, TRIGONOMETRIJA
I ANALITIČKA GEOMETRIJA

X IZDANJE

TEHNIČKA KNJIGA
ZAGREB

SADRŽAJ

I. ARITMETIKA I ALGEBRA

§ 1. **Razlomci** 11

1. Općenito o razlomcima 11
   a) obični razlomci 11
   b) Decimalni razlomci 11
   c) Pretvaranje običnog razlomka u decimalni. Periodski decimalni razlomci 12
   d) Pretvaranje decimalnog razlomka u obični 14
2. Proširivanje razlomaka 15
3. Skraćivanje razlomaka. Najveća zajednička mjera 15
4. Zbrajanje i oduzimanje razlomaka. Najmanji zajednički višekratnik 16
5. Množenje razlomaka 18
6. Dijeljenje razlomaka 19
7. Dvostruki razlomci 21

§ 2. **Operacija s općim brojevima** 23

1. Zbrajanje i oduzimanje 23
2. Množenje 23
3. Dijeljenje 24
4. Potenciranje 26
   a) Cijeli pozitivni eksponenti 26
   b) Cijeli negativni eksponenti 28
5. Vađenje korijena 29

§ 3. **Potencije s razlomljenim eksponentima pozitivnim i negativnim** 34

§ 4. **O brojevima** 36

1. Realni brojevi: racionalni i iracionalni 36
2. Imaginarni i kompleksni brojevi 37

§ 5. **Rastavljanje polinoma i binoma u množitelje** 38

§ 6. **Racionaliziranje nazivnika** 39

§ 7. **Razmjer (proporcija)** 41

§ 8. **Trojno pravilo** 43

§ 9. **Postotni račun** 45

§ 10. **Potenciranje binoma, binomni poučak, kvadrat trinoma i polinoma** 48

§ 11. **Jednadžbe** 51

1. Opća pravila 51
2. Linearne jednadžbe 51
   a) Linearna jednadžba s jednom nepoznanicom 51
   b) Sustav od dvije linearne jednadžbe sa dvije nepoznate 52
   c) Sustav od n linearnih jednadžbi sa n nepoznanicama 55

3. Kvadratne jednadžbe 56
a) Rješavanje kvadratne jednadžbe 56
b) Rastavljanje kvadratne jednadžbe u množitelje 59
4. Jednadžbe višeg stupnja, koje se svode na kvadratne 60
a) Bikvadratne jednadžbe 60
b) Recipročne ili simetrične jednadžbe 61
c) Binomne jednadžbe 63

§ 12. **Nejednadžbe** 66
1. Pojam i osnovna svojstva nejednadžbi 66
2. Rješavanje odredbenih nejednadžbi 69
a) Općenito 69
b) Nejednadžbe prvog stupnja sa jednom nepoznanicom 69
c) Sustavi nejednadžbi prvog stupnja 71
d) Nejednadžbe drugog stupnja 73

§ 13. **Nizovi (slijedovi)** 76
1. Aritmetički niz 76
2. Geometrijski niz 77
a) Konačni geometrijski niz 77
b) Beskonačni geometrijski niz 78

§ 14. **Približno računanje** 80
1. Logaritmiranje 80
2. Skraćeno množenje 88
3. Skraćeno dijeljenje 89

§ 15. **Kamatno-kamatni račun** 91
1. Složene kamate 91
2. Sadašnja i konačna vrijednost glavnice uložene uz složene kamate . 91
3. Periodske uplate 95
a) Konačna i sadašnja vrijednost periodskih uplata 95
b) Povećanje glavnice periodskim ulaganjem 97
4. Otplata duga. Anuiteti 98
5. Rente 100

II. GEOMETRIJA

§ 1. **Planimetrija** 105
1. Trokut 105
a) Sukladni trokuti 105
b) Slični trokuti 106
c) Četiri značajne tačke trokuta 107
d) Površina trokuta 107
e) Pravokutni trokut 107
2. Četvorokuti 108
a) Parelelogram 108
b) Pravokutnik 108
c) Kvadrat 108
d) Romb 108
e) Trapez 109
f) Deltoid 109
g) Tetivni četverokut 109
h) Tangentni četverokut 109
3. Mnogokuti (poligoni) 110
a) Općenito 110
b) Pravilni mnogokuti 110

4. Kružnica 112
a) Kutovi u kružnici 112
b) Sekanta i tangenta 112
c) Opseg i površina 113

§ 2. **Stereometrija (oplošje i obujam)** 114
1. Cavalierijev stavak 114
1. Izračunavanje oplošja i obujma (volumena) geometrijskih tjelesa .. 114
a) Prizma 115
b) Piramida 115
c) Valjak 116
d) Stožac 117
e) Približno izračunavanje obujma krnje piramide i krnjeg stošca .. 118
f) Kugla i njezini dijelovi 119

III. GONIOMETRIJA I TRIGONOMETRIJA

§ 1. **Definicija goniometrijskih, trigonometrijskih ili cirkularnih funkcija** .. 121
§ 2. **Proširenje definicije goniometrijskih funkcija** 125
Predočavanje goniometrijskih funkcija dužinama u jediničnoj kružnici 125
Neke vrijednosti goniometrijskih funkcija 127
§ 3. **Negativni kutovi** 131
§ 4. **Veza između goniometrijskih funkcija istog kuta** α 132
§ 5. **Prijelaz na šiljate kutove** 134
§ 6. **Funkcije zbroja kutova (teorem adicije)** 136
§ 7. **Funkcije razlike kutova** 137
§ 8. **Funkcije dvostrukog i polovičnog kuta** 138
§ 9. **Zbroj i razlika sinusa i kosinusa predočeni umnoškom** 141
§ 10. **Umnožak sinusa i kosinusa predočen u obliku zbroja i razlike** 142
§ 11. **Izračunavanje vrijednosti goniometrijskih funkcija iz zadanog kuta** ... 143
§ 12. **Računanje vrijedenosti kuta iz zadane vrijednosti goniometrijske funkcije** 145
§ 13. **Rješavanje pravokutnih trokuta** 149
1. Određivanje kateta 149
2. Određivanje hipotenuze 149

§ 14. **Rješavanje kosokutnih trokuta** 152
1. Obični slučajevi rješavanja kosokutnih trokuta 152
a) Sinusov poučak 152
b) Kosinusov poučak 153
c) Tangensov poučak 154
d) Primjena sinusova, kosinusova i tangensova poučka za rješavanje kosokutnih trokuta 155
2. Složeni slučajevi rješavanja trokuta. Mollweideove jednadžbe 159

§ 15. **Ploština trokuta** 162

IV. ANALITIČKA GEOMETRIJA U RAVNINI

§ 1. **Koordinatni sustavi i njihova veza** 165
1. Pravokutni koordinatni sustav 165
2. Polarni koordinatni sustav 166
3. Veza između polarnih i pravokutnih koordinata 167

2. **Transformacije pravokutnih koordinata** 169

1. Translacija koordinatnog sustava duž osi X 169
2. Translacija koordinatnog sustava duž osi Y 169
3. Translacija koordinatnog sustava duž osiju X i Y 169
4. Vrtnja koordinatnog sustava oko ishodišta za kut α 170
5. Translacija koordinatnog sustava duž osiju X i Y i vrtnja za kut α . 170

3. **Udaljenost dviju tačaka** 172

4. **Koordinate tačke koja dijeli zadanu dužinu u zadanom omjeru** $m : n$ .. 173

5. **Ploština trokuta** 177

6. **Jednadžba krivulje** 179

7. **Pravac** 180

1. Jednadžbe pravca 180
   a) Eksplicitni oblik jednadžbe pravca 180
   b) Konstrukcija pravca 182
   c) Opći ili implicitni oblik jednadžbe pravca 184
   d) Segmentni oblik jednadžbe pravca 185
   e) Normalni ili Hesseov oblik jednadžbe pravca 186
   f) Jednadžba pravca kroz zadanu tačku T_1 (x_1, y_1) 190
   g) Jednadžba pravca kroz dvije zadane tačke T_1 (x_1, y_1) i T_2 (x_2, y_2) 190

2. Usporednost dvaju pravaca: 191
3. Presjecište dvaju pravaca 192
4. Kut dvaju pravaca 193
5. Okomitost dvaju pravaca 194
6. Udaljenost tačke od pravca 195
7. Simetrala kuta 198

8. **Kružnica** 200

1. Definicija 200
2. Jednadžbe kružnice 200
   a) Središnja jednadžba kružnice polumjera r 200
   b) Opća jednadžba kružnice 201

3. Pravac kružnica 203
   a) Položaj pravca spram kružnice. Uvjetne jednadžbe 203
   b) Jednadžbe tangente i normale povučenih u zadanoj tački kružnice 207
   c) Jednadžbe tangenta povučenih iz zadane tačke izvan kružnice .. 210

4. Popis formula i upute za rješavanje zadataka u vezi s kružnicom .. 217

9. **Elipsa** 220

1. Definicija elipse. Kontrukcija žarišta i same elipse 220
2. Linearni i numerički ekscentricitet elipse. Parametar elipse 221
3. Jednadžbe elipse 222
   a) Središnja jednadžba elipse 222
   b) Vršna jednadžba elipse 224
   c) Jednadžba elipse, kojoj je središte u tački S, (p, q), a osi su usporedne s koordinatnim osima 225

4. Pravac i elipsa 227
   a) Uvjetna jednadžba 227
   b) Jednadžbe tangente i normale povučenih u zadanoj tački elipse 228
   c) Konstrukcija tangente u zadanoj tački elipse 228
   d) Jednadžbe tangenata povučenih iz zadane tačke izvan elipse 230
   e) Konstrukcija tangenata povučenih iz zadane tačke izvan elipse .. 233

5. Svojstva polare. Konjugirani promjeri elipse. Konstrukcija elipse iz zadanog para konjugiranih promjera 233
6. Apolonijevi teoremi 235

7. Približna konstrukcija elipse. Polumjeri zakrivljenosti elipse u vrhovima. Ploština elipse 236
8. Popis formula i upute za rješavanje zadataka u vezi s elipsom 237

§ 10. **Hiperbola** 239

1. Definicija hiperbole. Linearni i numerički ekscentricitet 239
2. Konstrukcija žarišta hiperbole i hiperbole same. Parametar hiperbole 240
3. Jednadžbe hiperbole 241
   a) Središnja jednadžba hiperbole 241
   b) Vršna jednadžba hiperbole 242
4. Pravac i hiperbola 243
   a) Asimptote hiperbole i njihova konstrukcija 243
   b) Jednadžbe tangente, normale i polare povučenih u zadanoj tački hiperbole 246
   c) Konstrukcija tangente u zadanoj tački hiperbole 247
   d) Jednadžbe tangenata povučenih iz zadane tačke izvan hiperbole 247
   e) Konstrukcija tangenata povučenih iz tačke izvan hiperbole 252
5. Jednadžba istostrane hiperbole s obzirom na koordinatni sustav, čije se osi podudaraju s asimptotama hiperbole 252
6. Popis formula i upute za rješavanje zadataka u vezi s hiperbolom .. 253

§ 11. **Parabola** 255

1. Definicija i konstrukcija parabole. Njen parametar i numerički ekscentricitet 255
2. Vršna jednadžba parabole 256
3. Pravac i parabola 257
   a) Jednadžbe tangente, normale i polare povučenih u zadanoj tački parabole 257
   b) Konstrukcija tangente u zadanoj tački parabole 258
   c) Jednadžbe tangenata povučenih iz zadane tačke izvan parabole .. 258
   d) Konstrukcija tangenata povučenih iz tačke izvan parabole 262
   e) Dijametri parabole konstrukcija parabole kojoj je zadan dijametar i jedna polara 262
   f) Konstrukcije parabola pomoću tangenata 262
   g) Ploština parabole 263
4. Popis formula i upute za rješavanje zadataka u vezi s parabolom 263

§ 12. **Općenito o krivuljama drugog reda ili presjecima stočca** 269

1. Presjeci stošca 269
2. Opća jednadžba presjeka stošca u pravokutnim koordinatama 270
3. Redukcija opće jednadžbe krivulja drugog reda 270
   a) Postupak za elipsu i hiperbolu 270
   b) Postupak za parabolu 272
4. Opća jednadžba presjeka stočca u polarnim koordinatama 278

I. ARITMETIKA I ALGEBRA

§ 1. RAZLOMCI

1. OPĆENITO O RAZLOMCIMA

a) Obični razlomci

$\frac{a}{b}$ je p r a v i razlomak, ako je brojnik a manji od nazivnika b, tj. $a < b$.

Znak $<$ znači »manji od«

Npr. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{8}$ itd. su pravi razlomci.

$\frac{a}{b}$ je n e p r a v i razlomak, ako je $a > b$.

Znak $>$ znači »veći od«

Npr. $\frac{3}{2}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{13}{5}$ itd. su nepravi razlomci.

M j e š o v i t i b r o j je zbroj cijelog broja i pravog razlomka, pri čemu se dogovorno ne piše znak + između cijelog i razlomljenog dijela broja.

Mješoviti se broj pretvara u nepravi razlomak tako da se cijeli broj pomnoži s nazivnikom, tom umnošku se pribroji brojnik, pa se tako dobiveni zbroj podijeli s nazivnikom.

Primjer: $5\frac{3}{7} = 5 + \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 7 + 3}{7} = \frac{38}{7}$.

b) Decimalni razlomci

Razlomak kojem je nazivnik jedinica s jednom ili više nula zove se decimalni razlomak, pa se radi jednostavnosti piše tako da se u brojniku odijeli od lijeva na desno »decimalnom« tačkom ili zarezom toliko znamenaka, koliko ima nula u nazivniku. U tom slučaju pisanje nazivnika postaje nepotrebnim, te se izostavlja. Ima li brojnik manji broj znamenaka negoli nazivnik nula, znamenke koje nedostaju zamjenjuju se nulama.

Npr.:

$$\frac{3}{10} = 0{,}3$$

$$\frac{3}{100} = 0{,}03$$

$$\frac{137}{10} = 13{,}7$$

$$\frac{137}{1000000} = 0{,}000137 \text{ itd.}$$

Decimalni razlomak ne mijenja svoje vrijednosti ako mu se na kraju pripišu nule.

Npr. $72{,}36 = 72{,}36000$, jer je $\dfrac{7236\cancel{000}}{100\cancel{000}} = \dfrac{7236}{100} = 72{,}36.$

c) Pretvaranje običnog razlomka u decimalni. Periodski decimalni razlomci

Obični razlomak pretvara se u decimalni tako da se brojnik podijeli s nazivnikom.

Tu mogu biti tri slučaja:

1. Nazivnik običnog razlomka sadrži samo množitelje 2 i 5 ($10 = 2 \cdot 5$), odnosno samo 2 ili samo 5.

U tom slučaju dobiva se *konačni decimalni razlomak.*

Npr.:

$$\frac{11}{80} = 11 : 80 = 0{,}1375$$

```
110
 300
  600
   400
     0
```

$(80 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5).$

Pamti:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$\frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\frac{1}{8} = 0{,}125.$$

2. Ako nazivnik običnog razlomka ne sadrži množitelje 2 i 5, dolazimo dijeljenjem brojnika s nazivnikom do **čisto periodskog beskonačnog decimalnog razlomka.**

Primjer:

$$\frac{2}{3} = 2:3 = 0{,}666\ldots = 0{,}\dot{6} = 0{,}(6).$$

20
20
20
itd.

Brojke koje se ponavljaju čine **period** beskonačnog decimalnog razlomka, koji se označuje tako da se stave tačke iznad svake znamenke perioda ili samo iznad prve i poslednje znamenke perioda ili se čitav period stavi u zagrade.

$$\frac{3}{7} = 3:7 = 0{,}4285714285714\ldots = 0{,}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}\dot{1} = 0{,}\dot{4}2857\dot{1} = 0{,}(428571)$$

30
20
60
40
50
10
30
20
60
40
50
10
30
20
itd.

3. Ako nazivnik običnog razlomka sadrži osim drugih množitelja također množitelje 2 ili 5, odnosno 2 i 5, dolazimo dijeljenjem brojnika s nazivnikom do **mješovitog periodskog beskonačnog decimalnog razlomka.**

Primjeri:

1. $$\frac{12}{35} = 12:35 = 0{,}342857142857 14\ldots = 0{,}3\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}\dot{1} = 0{,}3\dot{4}2857\dot{1} = 0{,}3(428571)$$

$(35 = 5 \cdot 7)$

120
150
100
300
200
250
50
150
100
300
200
250
50
150
itd.

2. $$\frac{97}{440} = 97 : 440 = 0{,}220(\dot{4}\dot{5}\dot{4}) = 0{,}220\dot{4}5\dot{4} = 0{,}220(454)$$

$$(440 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11).$$

d) Pretvaranje decimalnog razlomka u obični

Tu mogu biti također tri slučaja:

1) K o n a č n i d e c i m a l n i r a z l o m a k pretvara se u obični tako, da se u brojnik napiše zadani decimalni razlomak ispustivši decimalnu tačku, a u nazivnik se stavi 1 sa toliko nula, koliko decimalni razlomak ima znamenaka iza decimalne tačke.

Primjeri:

1. $$0{,}17 = \frac{17}{100}$$

2. $$0{,}00613 = \frac{613}{100000}$$

3. $$5{,}87 = 5\,\frac{87}{100}$$

$$\text{ili} = \frac{587}{100}.$$

2) Č i s t o p e r i o d s k i r a z l o m a k pretvara se u obični tako da se u brojnik napiše period, a u nazivnik broj koji se sastoji od toliko devetica, koliko ima znamenaka u periodu.

Primjeri:

1. $$0{,}\dot{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

2. $$0{,}\dot{3}\dot{7} = \frac{37}{99}$$

3. $$7{,}(013) = 7\,\frac{13}{999}.$$

3) M j e š o v i t i p e r i o d s k i r a z l o m a k pretvara se u obični tako da se u brojnik napiše razlika između broja što ga čine sve znamenke zadanog razlomka, i broja koji se sastoji od znamenaka ispod perioda, a u nazivnik broj koji ima toliko devetica koliko ima znamenaka u periodu, i toliko nula koliko ima znamenaka ispred perioda.

Primjeri:

1. $$0{,}3\dot{4} = \frac{34-3}{90} = \frac{31}{90}$$

2. $$7{,}15\dot{4}\dot{3}\dot{8} = 7\,\frac{15438 - 15}{99900} = 7\,\frac{15423}{99900}.$$

Dokaz postupka navedenog pod 2) i 3) vidi dalje, § 13, 2, b).

2. PROŠIRIVANJE RAZLOMAKA

Vrijednost razlomka se ne mijenja ako mu se brojnik i nazivnik pomnože s **istim** brojem.

Proširivanje razlomka daje mogućnost svođenja dvaju ili više razlomaka na zajednički nazivnik.

Primjer: Koji od razlomaka $\frac{2}{3}$ i $\frac{7}{12}$ ima veću vrijednost? Proširimo li prvi razlomak sa 4, dobijemo: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$.

Kako je $\frac{8}{12} > \frac{7}{12}$, bit će i $\underline{\frac{2}{3} > \frac{7}{12}}$.

Proširivanjem **decimalnih razlomaka** opravdava se pripisivanje nula na kraju decimalnog razlomka.

Npr. $7{,}9 = 7{,}90 = 7{,}900 =$ itd.

3. SKRAĆIVANJE RAZLOMAKA. NAJVEĆA ZAJEDNIČKA MJERA

Vrijednost razlomka se ne mijenja ako mu se brojnik i nazivnik podijele s **istim** brojem. To svojstvo razlomaka daje mogućnost njihova **skraćivanja**.

Skratiti razlomak znači podijeliti brojnik i nazivnik s njihovom najvećom zajedničkom mjerom.

Najveća zajednička mjera dvaju ili više brojeva jest onaj najveći broj, s kojim možemo sve zadane brojeve podijeliti bez ostatka. Ako su brojnik i nazivnik veći brojevi, određivanje njihove najveće zajedničke mjere, s kojom će se brojnik i nazivnik podijeliti da se razlomak skrati, vrši se tako, da se oba broja napišu jedan uz drugi, pa se traži onaj množitelj koji je sadržan u **oba** broja, s tim množiteljem dijele se oba broja, pa se postupak nastavlja dok ide. Tražena najveća zajednička mjera jednaka je umnošku ispisanih množitelja.

Primjer: Neka se skrati razlomak: $\frac{924}{1092}$

$$\begin{array}{rr|l} 924\,, & 1092 & 2 \\ 462\,, & 546 & 2 \\ 231\,, & 273 & 3 \\ 77\,, & 91 & 7 \\ 11\,, & 13 & - \end{array}$$

Najveća zajednička mjera je $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$

$$\frac{924}{1092} = \frac{924 : 84}{1092 : 84} = \underline{\frac{11}{13}}.$$

Skraćivanje **decimalnih razlomaka** svodi se na brisanje nula na kraju razlomka.

Npr.: **3,0050700 = 3,00507.**

4. ZBRAJANJE I ODUZIMANJE RAZLOMAKA. NAJMANJI ZAJEDNIČKI VIŠEKRATNIK

a) Razlomci imaju jednake nazivnike:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}.$$

Primjer:

$$\frac{3}{17} + \frac{8}{17} - \frac{5}{17} = \frac{3 + 8 - 5}{17} = \frac{11 - 5}{17} = \underline{\frac{6}{17}}.$$

b) Razlomci imaju različite nazivnike:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{db} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

Prije zbrajanja, odnosno oduzimanja, treba razlomke svesti na zajednički nazivnik, tj. treba naći onaj najmanji broj koji je djeljiv bez ostatka sa svim nazivnicima zadanih razlomaka. Drugim riječima, određivanje zajedničkog nazivnika svodi se na određivanje najmanjeg zajedničkog višekratnika za sve nazivnike razlomaka koji se zbrajaju, odnosno oduzimaju. Taj zajednički nazivnik (ili najmanji zajednički višekratnik nazivnika) dijelimo redom sa svim nazivnicima, pa brojnik i nazivnik množimo s rezultatima tog dijeljenja, što je dopušteno jer se vrijednost razlomka ne mijenja ako njegov brojnik i nazivnik pomnožimo s istim brojem. Na taj način dobivamo sve razlomke jednakih nazivnika, pa ih možemo zbrajati, odnosno oduzimati, tj. imamo slučaj a).

Pri određivanju zajedničkog nazivnika mogu biti tri slučaja:

1. Svi nazivnici zadanih razlomaka nemaju zajedničkih množitelja; tada je zajednički nazivnik jednak umnošku svih nazivnika.

Primjer:

$$\overbrace{\frac{3}{5}}^{33} - \overbrace{\frac{7}{11}}^{15} + \overbrace{\frac{2}{3}}^{55} =$$

Zajednički nazivnik: $5 \cdot 11 \cdot 3 = 165$, jer je $165 : 5 = 33$, $165 : 11 = 15$, $165 : 3 = 55$

$$= \frac{3 \cdot 33}{5 \cdot 33} - \frac{7 \cdot 15}{11 \cdot 15} + \frac{2 \cdot 55}{3 \cdot 55} = \frac{99}{165} - \frac{105}{165} + \frac{110}{165} = \frac{99 - 105 + 110}{165} = \frac{209 - 105}{165} = \underline{\frac{104}{165}}.$$

Ukoliko je moguće, treba skratiti razlomak dobiven kao rezultat zbrajanja, odnosno oduzimanja.

2. Svi su nazivnici zadanih razlomaka mali brojevi i imaju zajedničke množitelje. U tom slučaju treba ispitati ne bi li najveći nazivnik bio baš zajednički nazivnik. Ako to nije, množimo taj najveći nazivnik sa 2, 3 itd., dok ne dobijemo traženi zajednički nazivnik.

Primjeri:

1.
$$\overbrace{\frac{3}{4}}^{9}-\overbrace{\frac{7}{12}}^{3}-\overbrace{\frac{11}{36}}^{1}=$$

Zajednički nazivnik je 36, jer je $36:4=9$, $36:12=3$, $36:36=1$

$$=\frac{27}{36}-\frac{21}{36}-\frac{11}{36}=\frac{27-21-11}{36}=\frac{27-32}{36}=\frac{-5}{36}=-\underline{\frac{5}{36}}.$$

2.
$$-\overbrace{\frac{7}{15}}^{5}-\overbrace{\frac{2}{25}}^{3}-\overbrace{\frac{3}{5}}^{15}=$$

25 nije zajednički nazivnik, jer broj 25 nije djeljiv sa 15, $25\cdot 2=50$ također, ali $25\cdot 3=75$ je traženi zajednički nazivnik, jer je $75:15=5$, $75:25=3$, $75:5=15$

$$=-\frac{35}{75}-\frac{6}{75}-\frac{45}{75}=\frac{-35-6-45}{75}=\frac{-86}{75}=-\frac{86}{75}=-\underline{1\frac{11}{75}}.$$

3. Nazivnici zadanih razlomaka veći su brojevi. U tom slučaju zajednički nazivnik ne možemo odrediti na gore navedeni način, već treba sve nazivnike rastaviti na proste množitelje. U tu svrhu pišemo sve nazivnike redom, pa nalazimo onaj prosti množitelj koji je sadržan barem u dva zadana nazivnika. S tim množiteljem dijelimo ta dva nazivnika, a ostale prepisujemo. Postupak nastavljamo dok ide. Traženi zajednički nazivnik jednak je umnošku svih ispisanih množitelja i brojeva preostalih u posljednjem retku.

Primjer:

$$\overbrace{\frac{1}{340}}^{1155}-\overbrace{\frac{7}{132}}^{2975}+\overbrace{\frac{11}{1050}}^{374}=$$

$$\begin{array}{rrr|l}
340, & 132, & 1050 & 2\\
170, & 66, & 525 & 2\\
85, & 33, & 525 & 3\\
85, & 11, & 175 & 5\\
17, & 11, & 35 &
\end{array}$$

Zajednički nazivnik: $2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 17\cdot 11\cdot 35=392700$

$392700:340=1155$, $392700:132=2975$, $392700:1050=374$

$$=\frac{1155}{392700}-\frac{20825}{392700}+\frac{4114}{392700}=\frac{1155-20825+4114}{392700}=\frac{5269-20825}{392700}=$$

$$=\frac{-15556}{392700}=-\underline{\frac{15556}{392700}}.$$

Zbrajanje, odnosno oduzimanje d e c i m a l n i h r a z l o m a k a vrši se tako da se ti razlomci potpisuju jedan ispod drugoga, pazeći da desetice dođu ispod desetica, stotice ispod stotica itd., pri čemu se kod oduzimanja decimalna mjesta koja nedostaju nadopunjuju nulama.

Primjeri:

1. $25{,}635 + 1{,}08 + 0{,}3 =$

$$= \begin{array}{r} 25{,}635 \\ 1{,}08 \\ 0{,}3 \\ \hline \underline{\underline{27{,}015}} \end{array}$$

2. $5308{,}02 - 458{,}5869 =$

$$= \begin{array}{r} 5308{,}0200 \\ -\ 458{,}5869 \\ \hline \underline{\underline{4849{,}4331}} \end{array}$$

3. 5 m 8 cm + 35 cm — 21,8 dm + 388 mm = 5,08 m + 0,35 m — 2,18 m + 0,388 m = = 5,818 m — 2,18 m = **3,638 m.**

5. MNOŽENJE RAZLOMAKA

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Razlomci se množe tako, da se posebno izmnože brojnici, a posebno nazivnici, pa se prvi umnožak podijeli s drugim. Prije množenja vrši se kraćenje.

Primjeri:

$$\frac{15}{77} \cdot 1\frac{19}{25} = \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{7}{\cancel{77}}} \cdot \frac{\overset{4}{\cancel{44}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} = \underline{\frac{12}{35}}$$

$$\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{1} = \frac{an}{b}$$

$$n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{na}{b} = \frac{an}{b}.$$

Razlomak se množi cijelim brojem, odnosno cijeli broj s razlomkom tako, da se s cijelim brojem pomnoži brojnik, pa umnožak podijeli s nazivnikom. Prije množenja vrši se kraćenje.

Primjeri:

1. $$\overset{9}{\cancel{18}} \cdot \frac{7}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{63}{2} = \underline{31\frac{1}{2}}$$

2. $$\frac{5}{\underset{3}{\cancel{12}}} \cdot \overset{10}{\cancel{40}} = \frac{50}{3} = \underline{16\frac{2}{3}}.$$

Množenje decimalnih razlomaka vrši se bez obzira na položaj decimalne tačke, pa se u rezultatu odijeli sdesna nalijevo toliko decimalnih mjesta koliko ih ukupno ima u svim množiteljima.

Primjer:

$$4{,}36 \cdot 0{,}0505 = 0{,}220180 = \underline{0{,}22018}$$

$$2 + 4 = 6.$$

Primjedba. Množenje decimalnog razlomka s potencijom broja 10, tj. brojem koji se sastoji od jedinice i nula (npr. $10^3 = 1000$) svodi se na premještanje decimalnog zareza slijeva nadesno za toliko znamenaka, koliko ima nula u potenciji broja 10, odnosno jedinica u eksponentu broja 10.

Primjer:

$$2{,}031 \cdot 10000 = 2{,}031 \cdot 10^4 = 20310.$$

Vidi također skraćeno množenje, § 14, 2.

6. DIJELJENJE RAZLOMAKA

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Dva se razlomka dijele tako da se prvi razlomak prepiše kako je zadan, a zatim se pomnoži s recipročnom vrijednošću drugog razlomka. Prije množenja vrši se kraćenje.

Primjer:

$$\frac{20}{63} : \frac{15}{49} = \frac{20}{63} \cdot \frac{49}{15} = \frac{\overset{4}{\cancel{20}} \cdot \overset{7}{\cancel{49}}}{\underset{9}{\cancel{63}} \cdot \underset{3}{\cancel{15}}} = \frac{28}{27} = \underline{1\frac{1}{27}}$$

$$\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b} : \frac{n}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{n} = \frac{a}{b \cdot n}$$

Razlomak se dijeli cijelim brojem tako da se njegov nazivnik pomnoži s tim cijelim brojem. Prije množenja vrši se kraćenje.

Primjer:

$$\frac{18}{25} : 27 = \frac{18}{25} \cdot \frac{1}{27} = \frac{\overset{2}{\cancel{18}}}{25 \cdot \underset{3}{\cancel{27}}} = \underline{\frac{2}{75}}.$$

Primjedba. Ako je divizor cijeli broj, a dividend je djeljiv tim cijelim brojem, bolje je neposredno podijeliti brojnik tim cjelobrojnim divizorom.

Primjer:

Polovina od $\frac{8}{9}$ je $\frac{8:2}{9} = \frac{4}{9}$; $\left(\frac{8}{9} : 2 = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{9 \cdot \underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{4}{9}\right)$.

ali polovina od $\frac{7}{9}$ je $\frac{7}{18}$; $\left(\frac{7}{9} : 2 = \frac{7}{9 \cdot 2} = \frac{7}{18}\right)$.

$$n : \frac{a}{b} = n \cdot \frac{b}{a} = \frac{n \cdot b}{a}.$$

C i j e l i b r o j s e d i j e l i s r a z l o m k o m tako da se pomnoži s recipročnom vrijednošću razlomka. Prije množenja vrši se kraćenje.

Primjer:

$$72 : \frac{9}{5} = 72 \cdot \frac{5}{9} = \frac{\overset{8}{\cancel{72}} \cdot 5}{\underset{1}{\cancel{9}}} = \underline{40}.$$

D i j e l j e n j e d e c i m a l n o g r a z l o m k a s c i j e l i m b r o j e m pokazat ćemo na primjerima.

Primjer 1.

6,318 : 312 = 0,02025 780 1560 0000	u 6 ide 312 nula puta, pišemo 0 i zarez, u 63 ide također 0 puta, pišemo 0, u 631 ide 2 puta, pišemo 2, ostatak 7, spuštamo 8 dolje, u 78 ide 0 puta, pišemo 0, dodajemo ostatku 0, dijelimo, dobijemo 2 itd.

Ako pri dijeljenju ne dolazimo do svih nula u ostatku ili ako ne trebamo sve decimale u kvocijentu, zadovoljavamo se p r i b l i ž n o m v r i j e d n o š ć u kvocijenta, tj. računamo s obzirom na potrebni stupanj tačnosti samo na potrebne decimale više jedna. Tu suvišnu decimalu računamo, da možemo posljednju pridržanu znamenku povećati za 1, ako je ta suvišna znamenka, koju odbacujemo, 5 ili veća od 5, odnosno ostaviti bez promjene, ako je ta znamenka manja od 5. Na taj način dobivamo tačniju približnu vrijednost i možemo lako pokazati da je apsolutna pogreška tako dobivene približne vrijednosti manja od polovine posljednje pridržane decimale.

Primjer 2: Zadruga je platila 12 komada robe Din 137,50. Koliko je stoji 1 komad?

Jasno je da će zadruga računati vrijednost jednog komada robe na paru, odnosno na 0,01 dinara tačno.

137,50 : 12 = 11,458 17 55 70 100	1 komad robe stoji **Din 11,46.**

D i j e l j e n j e d e c i m a l n o g r a z l o m k a s p o t e n c i j o m b r o j a 10 svodi se na premještanje decimalne tačke s d e s n a n a l i j e v o za toliko znamenaka, koliko ima nula u potenciji broja 10.

Npr.: 12,638 : 10000 = $\underline{0{,}0012638}$.

Dijeljenje cijelog broja ili decimalnog razlomka s decimalnim razlomkom može se svesti na dijeljenje cijelog broja, odnosno decimalnog razlomka s cijelim brojem. To se postizava tako da se dividend i divizor, odnosno brojnik i nazivnik, pomnože s takvom potencijom broja 10, da nazivnik bude cijeli broj.

Primjer:

$$312{,}606 : 0{,}09 = 31260{,}\dot{6} : 9 = \underline{3473{,}4}.$$

Opći primjer za računanje s decimalnim brojevima

Drvorezac je napravio od 1 kubnog metra (m^3) drva 1738 igračaka. Koliko ga stoji drvo utrošeno na 1 igračku, ako je m^3 drva platio 2500 Din?

Uzevši u obzir da 1 m ima 100 cm i da je prema tome 1 m^3 = 100 cm · 100 cm · 100 cm = 1 000000 cm^3 (kubnih centimetara), izračunajmo:

1. vrijednost 1 cm^3 drva:
   2500 : 1000000 = 0,0025 Din = 0,25 para
2. količinu drva utrošenog na 1 igračku
   1000000 : 1738 = 575,4 cm^3
3. vrijednost drva za 1 igračku:
   575,4 · 0,25 = 144 pare = $\underline{1{,}44 \text{ Din.}}$

Vidi također skraćeno dijeljenje. § 14, 3.

7. DVOSTRUKI RAZLOMCI

To su razlomci kojima su brojnik i nazivnik opet razlomci, ili se razlomak nalazi samo u brojniku ili samo u nazivniku. Takve razlomke lako svodimo na obične (jednostruke), ako uzmemo u obzir da razlomkova crta (»kroz«) znači dijeljenje $\left(\dfrac{a}{b} = a : b\right)$.

Primjeri:

1. $$\frac{\frac{27}{125}}{\frac{3}{5}} = \frac{27}{125} : \frac{3}{5} = \frac{27}{125} \cdot \frac{5}{3} = \frac{\overset{9}{\cancel{27}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{25}{\cancel{125}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}}} = \underline{\frac{9}{25}};$$

2. $$\frac{7}{\frac{12}{35}} = 7 : \frac{12}{35} = 7 \cdot \frac{35}{12} = \frac{7 \cdot 35}{12} = \frac{245}{12} = \underline{20\frac{5}{12}};$$

$$\frac{\frac{3}{4}}{8} = \frac{3}{4} : 8 = \frac{3}{4 \cdot 8} = \underline{\frac{3}{32}}.$$

Ako se u brojniku i nazivniku nalazi zbroj ili razlika razlomaka, dvostruki se razlomak može riješiti tako da ga proširimo zajedničkim nazivnikom svih razlomaka koji se nalaze u brojniku i nazivniku dvostrukog razlomka.

Primjer:

$$\frac{\frac{3}{4}-\frac{2}{15}}{\frac{7}{12}+\frac{11}{20}}=\frac{\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{15}\right)\cdot 60}{\left(\frac{7}{12}+\frac{11}{20}\right)\cdot 60}=\frac{\frac{3}{\cancel{4}_1}\cdot\overset{15}{\cancel{60}}-\frac{2}{\cancel{15}_1}\cdot\overset{4}{\cancel{60}}}{\frac{7}{\underset{1}{\cancel{12}}}\cdot\overset{5}{\cancel{60}}+\frac{11}{\underset{1}{\cancel{20}}}\cdot\overset{3}{\cancel{60}}}=\frac{3\cdot 15-2\cdot 4}{7\cdot 5+11\cdot 3}=\frac{45-8}{35+33}=\underline{\underline{\frac{37}{68}}}.$$

§ 2. OPERACIJE S OPĆIM BROJEVIMA

1. ZBRAJANJE I ODUZIMANJE

$$
\left.
\begin{aligned}
a + b &= b + a \\
a + (b + c) &= a + b + c \\
a + (b - c) &= a + b - c \\
a - (b + c) &= a - b - c \\
a - (b - c) &= a - b + c
\end{aligned}
\right| \qquad (1)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
a + (b - c + d) &= a + b - c + d \\
a - (b - c + d) &= a - b + c - d
\end{aligned}
\right| \qquad (2)
$$

Iz (2) slijedi:

Uklanjanje zagrada. Ako pred zagradom stoji znak plus, zagrada se naprosto izostavi, ako stoji minus, svi se pribrojnici uzimaju sa suprotnim predznakom, jer je

$$+ (+a) = +a; \quad -(-a) = +a; \quad -(+a) = -a; + (-a) = -a.$$

Primjer: $26x - (7y - 8x) - [8y - (7x + 3y) + (4x - 5y) - 11x] =$

$= 26x - 7y + 8x - 8y + (7x + 3y) - (4x - 5y) + 11x =$

$= 26x - 7y + 8x - 8y + 7x + 3y - 4x + 5y + 11x =$

$= 52x - 4x + 8y - 15y = \underline{48x - 7y}$

2. MNOŽENJE

$$
\left.
\begin{aligned}
&a \cdot n = a + a + a + a + \ldots + a \ (n \text{ pribrojnika}) \\
&a \cdot b = b \cdot a; \qquad a \cdot 0 = 0
\end{aligned}
\right| \qquad (3)
$$

$$(+a)\cdot(+b)=+(ab)$$
$$(+a)\cdot(-b)=(-a)\cdot(+b)=-(ab) \tag{4}$$
$$(-a)\cdot(-b)=+(ab)$$

$$(a-b+c)\cdot n=an-bn+cn \tag{5}$$

Iz (5) slijedi:

Algebarski zbroj (polinom), tj. zbroj od više pozitivnih i negativnih pribrojnika, množi se s brojem tako da se svaki pribrojnik pomnoži s tim brojem.

$$\begin{aligned}(a-b+c)\cdot(d-f)&=(a-b+c)\,d-(a-b+c)\,f=\\&=ad-bd+cd-af+bf-cf\end{aligned} \tag{5a}$$

To znači:

Algebarski zbroj množi se s algebarskim zbrojem tako da se svi članovi prvog zbroja pomnože redom sa svim članovima drugog zbroja.

$$(ab)\cdot c=(ac)\cdot b=(bc)\cdot a \tag{6}$$

Umnožak se množi s brojem tako da se jedan množitelj pomnoži s tim brojem.

Primjer: $(5a\cdot 3b)\cdot 7=5\cdot 7a\cdot 3b=5\cdot 7\cdot 3\cdot a\cdot b=\underline{105ab}.$

3. DIJELJENJE

$$a:b=\frac{a}{b}$$
$$0:b=0 \tag{7}$$
$$a:0 \text{ nema smisla}$$

$$(+a):(+b)=+(a:b)$$
$$(-a):(-b)=+(a:b)$$
$$(+a):(-b)=(-a):(+b)=-(a:b) \tag{8}$$
ili
$$\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$$

$$(a+b-c):d=(a:d)+(b:d)-(c:d) \tag{9}$$

Iz (9) slijedi:

A l g e b a r s k i s e z b r o j d i j e l i s b r o j e m t a k o d a s e s v a k i p r i b r o j n i k p o d i j e l i s t i m b r o j e m.

Primjer: $(15a - 9b + 3) : (-3) = \underline{-5a + 3b - 1}.$

$$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b = (b : c) \cdot a \tag{10}$$

U m n o ž a k s e d i j e l i s b r o j e m t a k o d a s e j e d a n m n o ž i t e l j p o d i j e l i s t i m b r o j e m.

Primjer: $(5x \cdot 36y) : (-12) = -5x \cdot 3y = \underline{-15xy}.$

D v a s e p o l i n o m a d i j e l e tako da se najprije njihovi članovi poredaju po padajućim ili rastućim potencijama jednog slova, a nakon toga se prvi član dividenda, odnosno p r v i član ostatka, dijeli uvijek s p r v i m članom divizora.

Primjeri:

1.
$$
\begin{array}{l}
(6x^4 - 19x^3 - 4x^2 + 47x - 30):(2x^2 - 7x + 5) = \underline{3x^2 + x - 6}\\
\underline{\pm\ 6x^4 \mp 21x^3 \pm 15x^2}\ [= (2x^2 - 7x + 5)\cdot 3x^2]\\
\qquad\quad + 2x^3 - 19x^2 + 47x\\
\qquad\quad \underline{\pm\ 2x^3 \mp 7x^2 \pm 5x}\ [= (2x^2 - 7x + 5)\cdot x]\\
\qquad\qquad\quad -12x^2 + 42x - 30\\
\qquad\qquad\quad \underline{\mp\ 12x^2 \pm 42x \mp 30}\ [=(2x^2 - 7x + 5)\cdot(-6)]\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

2.
$$
\begin{array}{l}
(a^3 + b^3):(a + b) = \underline{a^2 - ab + b^2}\\
\underline{\pm\ a^3 \pm a^2b}\ [= (a + b)\cdot a^2]\\
-\ a^2b + b^3\\
\underline{\mp\ a^2b \qquad \mp ab^2}\ [= (a + b)\cdot(-ab)]\\
+\ ab^2 + b^3\\
\underline{\pm\ ab^2 \pm b^3}\ [= (a + b)\cdot b^2]\\
\quad 0
\end{array}
$$

3.
$$
\begin{array}{l}
(3x^2 - x + 7):(2x + 3) = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{11}{4} + \dfrac{\frac{61}{4}}{2x + 3} = \underline{\dfrac{3}{2}x - \dfrac{11}{4} + \dfrac{61}{4}\,\dfrac{1}{2x + 3}}\\
\underline{\pm\ 3x^3 \pm \dfrac{9}{2}x}\\
\qquad -\dfrac{11}{2}x + 7\\
\qquad \underline{\mp\ \dfrac{11}{2}x \mp \dfrac{33}{4}}\\
\qquad\qquad + \dfrac{61}{4}.
\end{array}
$$

4. POTENCIRANJE

a) Cijeli pozitivni eksponenti

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a \, (n \text{ množitelja}).$$

a = osnovka ili baza

n = eksponent

a^n = potencija

$$\left.\begin{aligned} a^1 &= a \\ (-a)^{2n} &= +a^{2n} \end{aligned}\right| \qquad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} (a-b)^{2n} &= (b-a)^{2n} \\ (-a)^{2n+1} &= -a^{2n+1} \\ (a-b)^{2n+1} &= -(b-a)^{2n+1} \end{aligned}\right| \qquad (11)$$

$2n$ — oznaka parna (taka) broja.
$(2n+1)$ ili $(2n-1)$ — oznaka neparna (liha) broja

Iz (11) slijedi:

Ako je osnovka pozitivna, potencija je uvijek pozitivna, a ako je osnovka negativna, potencija je negativna samo u tom slučaju kad je eksponent neparan (lih).

Primjeri: $(2)^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16,$

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16;$

$(2)^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32.$

$$a^m \cdot a^r = a^{m+r} \qquad | \qquad (12)$$

To znači:

Potencije istih osnovaka množe se tako da se njihovi eksponenti zbroje.

Primjer:

$$x^3 \cdot x^4 \cdot x^7 = x^{3+4+7} = \underline{x^{14}}.$$

$$a^m : a^r = a^{m-r}, \quad \text{za } m > r \qquad | \qquad (13)$$

To znači:

Potencije istih osnovaka dijele se tako da se njihovi eksponenti oduzmu.

Primjer:

$$6x^7 : 2x^3 = 3x^{7-3} = \underline{3x^4}.$$

$$a^m : a^r = \frac{1}{a^{r-m}}\,; \quad \text{za } m < r. \tag{13a}$$

Primjer:

$$3x^3 : 2x^7 = \frac{3}{2x^{7-3}} = \underline{\frac{3}{2x^4}}.$$

$$a^m : a^r = a^m : a^m = \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1\,; \quad \text{za } m = r. \tag{13b}$$

Primjer:

$$\frac{8x^7}{12x^7} = \frac{2}{3}x^{7-7} = \frac{2}{3}x^0 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \underline{\frac{2}{3}}.$$

$$a^0 = 1 \tag{13c}$$

S v a k i b r o j d i g n u t n a n u l t u p o t e n c i j u j e d n a k j e 1, jer je prema (13b) nulta potencija rezultat dijeljenja potencija istih osnovaka i istih eksponenata.

Npr.:

$$\frac{(-2)^3}{(-2)^3} = \frac{-8}{-8} = 1 \quad \text{ili} \quad \frac{(-2)^3}{(-2)^3} = (-2)^{3-3} = (-2)^0 = 1$$

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m. \tag{14}$$

U m n o ž a k s e p o t e n c i r a t a k o d a s e p o t e n c i r a s v a k i m n o ž i t e l j.

Primjer:

$$[(-3)\cdot 5\cdot 10]^3 = (-3)^3\cdot 5^3\cdot 10^3 = (-27)\cdot 125\cdot 1000 = \underline{-3375000.}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \tag{15}$$

R a z l o m a k s e p o t e n c i r a t a k o d a s e p o s e b n o p o t e n c i r a b r o j n i k, a p o s e b n o n a z i v n i k.

Primjer:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \underline{\frac{32}{243}}.$$

$$(a^m)^r = a^{m\cdot r} \tag{15a}$$

Potencija se potencira tako da se eksponenti izmnože.

Primjer:

$$(-3x^2yz^5)^4 = (-3)^4 \cdot x^{2\cdot 4} \cdot y^{1\cdot 4} \cdot z^{5\cdot 4} = +\underline{81x^8y^4z^{20}}.$$

Pazi: **Eksponenti se nikad ne potenciraju!**

b) Cijeli negativni eksponenti

Do potencija s negativnim eksponentima dolazimo kada pri dijeljenju potencija s istim osnovkama oduzimamo od manjeg veći eksponent, npr.:

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^{5-3}} = \frac{1}{a^2} \qquad \text{ili}$$

$\dfrac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$, dakle $a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$, odnosno $\dfrac{1}{a^2} = a^{-2}$, ili općenito:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}; \; a^m = \frac{1}{a^{-m}} \tag{16}$$

Potencija s negativnim eksponentom jednaka je recipročnoj vrijednosti potencije s pozitivnim eksponentom.

To daje mogućnost prebacivanja svake potencije iz brojnika u nazivnik i obratno, treba samo promijeniti predznak eksponenta.

Primjer:

$$\frac{2x^{-5}y^3}{3z\,u^{-2}} = \frac{2y^3u^2}{3x^5z} = 2\cdot 3^{-1}x^{-5}y^3u^2z^{-1} = \frac{1}{2^{-1}\cdot 3x^5y^{-3}u^{-2}z}.$$

Množenje

Eksponenti se zbrajaju!

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^{-r} &= a^{m-r} \\ a^{-m} \cdot a^r &= a^{-m+r} \; a^{-m+r} \\ a^{-m} \cdot a^{-r} &= a^{-m-r} = a^{-(m+r)} \end{aligned} \tag{17}$$

Dijeljenje

Eksponenti se oduzimaju!

$$\begin{aligned} a^m : a^{-r} &= a^{m+r} \\ a^{-m} : a^r &= a^{-m-r} \\ a^{-m} : a^{-r} &= a^{-m+r} \end{aligned} \tag{18}$$

Potenciranje

$$(a \cdot b)^{-m} = a^{-m} \cdot b^{-m}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m \qquad (19)$$

Eksponenti se množe!

$$(a^{-m})^r = a^{-mr}$$
$$(a^{-m})^{-r} = a^{mr} \qquad (20)$$
$$(a^m)^{-r} = a^{-mr}$$

Pazi: Rezultat računanja ne smije sadržavati potencije s negativnim eksponentima!

Primjer:

$$\left[\frac{(a+b)^{-4} c^{-5}}{5d (a-b)^{-6}}\right]^{-3} = \frac{(a+b)^{12} c^{15}}{5^{-3} d^{-3} (a-b)^{18}} = \underline{\frac{125 (a+b)^{12} c^{15} d^3}{(a-b)^{18}}}.$$

5. VAĐENJE KORIJENA

Ako je zadana vrijednost a potencije x^n, tj. $x^n = a$, tada je osnovka x jednaka n-tom korijenu iz vrijednosti potencije a, tj. $x = \sqrt[n]{a}$, gdje je $a =$ radikand, a $n =$ eksponent korijena. Kaže se da je vađenje korijena inverzna, tj. suprotna operacija od potenciranja, kao npr. zbrajanje i oduzimanje, množenje i dijeljenje. Drugim riječima:

izvaditi n-ti korijen iz zadanog broja a znači naći takav broj x, kojega je n-ta potencija, tj. x^n, jednaka zadanom broju a.

Npr.:

$$\sqrt{9} = \pm 3, \quad \text{jer je} \quad (+3)^2 = +9 \quad \text{i} \quad (-3)^2 = +9$$

$$\sqrt[3]{8} = 2, \quad \text{jer je} \quad 2^3 = 8$$

$$\sqrt[4]{81} = \pm 3, \quad \text{jer je} \quad (+3)^4 = +81 \quad \text{i} \quad (-3)^4 = +81.$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2, \quad \text{jer je} \quad (-2)^3 = -8$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2 \quad \text{jer je} \quad (-2)^5 = -32,$$

ali $\sqrt{-9}$ ne postoji u realnom području brojeva, jer nema takvog broja čiji bi kvadrat bio negativan. S istog razloga nema realnog značenja npr. $\sqrt[4]{-81}$.

Iz navedenih primjera slijedi:

1. Korijen iz pozitivnog broja može se uvijek izvaditi, pri čemu je rezultat dvoznačan ($\pm$) ako je eksponent korijena paran (tak);

2. Korijen parnog eksponenta iz negativnog broja nema smisla u realnom području brojeva, dok je korijen neparnog (lihog) eksponenta iz negativnog broja realan i ima predznak minus.

Praktički se najčešće računa drugi korijen i to najjednostavnije pomoću logaritamskog računala* ili logaritamskih tablica (vidi § 14, 1) ili tablica kvadrata.

$$\begin{aligned} \sqrt[1]{a} &= a \\ \sqrt[2]{a} &= \sqrt{a} \\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^n &= a \end{aligned} \qquad (21)$$

Posljednja jednakost kazuje da se broj a ne mijenja ako iz njega izvadimo n-ti korijen, a zatim ga dignemo na n-tu potenciju, jer smo time nad brojem a izvršili redom dvije inverzne (suprotne) operacije.

Npr.:

$$\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 = a^2 - x^2.$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad (22)$$

Korijen iz potencije vadi se tako da se eksponent potencije podijeli s eksponentom korijena.

Primjer:

$$\sqrt[3]{x^{12}} = x^{\frac{12}{3}} = \underline{x^4}.$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad (23)$$

Korijen iz umnoška vadi se tako da se korijen vadi posebno iz svakog množitelja.

Primjer:

$$\sqrt[5]{3125\, x^{10} y^{15}} = \sqrt[5]{5^5\, x^{10} y^{15}} = 5^{\frac{5}{5}} x^{\frac{10}{5}} y^{\frac{15}{5}} = \underline{5\, x^2 y^3}.$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad (23a)$$

* Vidi od istog pisca: »Logaritamsko računalo«

Korijeni istih eksponenata množe se tako da se pod znakom istog korijena izmnože radikandi.

Primjer:

$$\sqrt[3]{4x^2y^5z}\cdot\sqrt[3]{2x^7yz^2}=\sqrt[3]{8x^9y^6z^3}=\underline{2x^3y^2z.}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad (24)$$

Primjer:

$$\sqrt{\frac{16x^8y^{10}}{25z^2u^{12}}}=\frac{\sqrt{16x^8y^{10}}}{\sqrt{25z^2u^{12}}}=\underline{\pm\frac{4x^4y^5}{5zu^6}}.$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad (24a)$$

$$\frac{\sqrt[5]{3x^2y^{11}z}}{\sqrt[5]{96x^{12}yz^{16}}}=\sqrt[5]{\frac{3x^2y^{11}z}{96x^{12}yz^{16}}}=\sqrt[5]{\frac{y^{10}}{32x^{10}z^{15}}}=\frac{y^2}{2x^2z^3}=\underline{\frac{1}{2}\,\frac{y^2}{x^2z^3}}.$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}}=\frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}}=\sqrt[n]{\frac{1}{\frac{a}{b}}}=\sqrt[n]{\frac{b}{a}} \qquad (24b)$$

Primjer:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}}}=\underline{\sqrt[3]{\frac{x-y}{x+y}}}.$$

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[\frac{n}{r}]{a^{\frac{m}{r}}} \qquad (25)$$

Vrijednost korijena se ne mijenja ako se eksponenti korijena i radikanda pomnože ili podijele s istim **brojem.**

Primjer:

$$\sqrt[3]{16x^5y^7}\cdot\sqrt{2x^3y}=\sqrt[3\cdot 2]{16^2x^{10}y^{14}}\cdot\sqrt[2\cdot 3]{2^3x^9y^3}=\sqrt[6]{(2^4)^2\cdot 2^3x^{19}y^{17}}=$$

$$=\sqrt[6]{2^8\cdot 2^3x^{18}xy^{12}y^5}=x^3y^2\sqrt[6]{2^6\cdot 2^5xy^5}=\underline{2x^3y^2\sqrt[6]{32xy^5}.}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m} \qquad (26)$$

Korijen se potencira tako da se potencira radikand.

Primjeri:

1. $$\left(\sqrt[3]{\frac{2x^2y^7}{3zu^5}}\right)^5 = \sqrt[3]{\left(\frac{2x^2y^7}{3zu^5}\right)^5} = \sqrt[3]{\frac{2^5x^{10}y^{35}}{3^5z^5u^{25}}} = \sqrt[3]{\frac{2^3\cdot 2^2x^9xy^{33}y^2}{3^3\cdot 3^2z^3z^2u^{24}u}} =$$

$$= \underline{\frac{2}{3}\,\frac{x^3y^{11}}{zu^8}\sqrt[3]{\frac{4xy^2}{9z^2u}}}.$$

2. $$\left(\sqrt[4]{4}\right)^3 = \left(\sqrt[4]{2^2}\right)^3 = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2\cdot 2} = \underline{2\sqrt{2}}.$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} \qquad (27)$$

Korijen se vadi iz korijena tako da se eksponenti korijena izmnože.

Primjeri:

1. $$\sqrt[3]{\sqrt[4]{64}} = \sqrt[12]{2^6} = \underline{\sqrt{2}}.$$

2. $$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^3}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^3}} = \underline{\sqrt[5]{a}}.$$

$$a\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^nb}. \qquad (28)$$

Primjeri:

1. $$3xy^2z^4\sqrt[5]{2x^2yz^3} = \sqrt[5]{3^5x^5y^{10}z^{20}\cdot 2x^2yz^3} = \underline{\sqrt[5]{486x^7y^{11}z^{23}}}.$$

2. $$\sqrt[m]{a\sqrt[n]{2a^s\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[m]{a\sqrt[n]{\sqrt[p]{2^pa^{ps+1}}}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n\sqrt[p]{2^pa^{ps+1}}}} =$$

$$= \sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{2^pa^{ps+np+1}}}} = \underline{\sqrt[mnp]{2^p\,a^{ps+np+1}}}.$$

Pazi: Korijen iz binoma ne možemo nikada izvaditi!

Tako je npr. $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$, jer je prema (46): $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, a ne $a^2 + b^2$

Znak $\neq$ znači »različit od«

Korijeni se mogu zbrajati i oduzimati samo onda, kad su im jednaki radikandi i eksponenti.

Primjer:

$$5\sqrt[3]{7} + 8\sqrt[3]{7} - 3\sqrt[3]{7} = 10\sqrt[3]{7}.$$

§ 3. POTENCIJE S RAZLOMLJENIM EKSPONENTIMA POZITIVNIM I NEGATIVNIM

Iz (22) slijedi:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad . \qquad (29)$$

Pazi: Nazivnik je eksponent korijena, a brojnik — eksponent radikanda!

Primjer:

$$(5x^3 y z^7)^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{5^3 x^9 y^3 z^{21}} = \underline{x z^3 \sqrt[7]{125 x^2 y^3}}.$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad . \qquad (30)$$

Primjer:

$$-x^{\frac{4}{9}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{9}}} = \frac{1}{\underline{\sqrt[9]{x^4}}} .$$

Važan je i obrat:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{-\frac{m}{n}} \qquad (30a)$$

Primjer:

$$\frac{1}{x\sqrt[7]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[7]{x^9}} = \frac{1}{x^{\frac{9}{7}}} = x^{-\frac{9}{7}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} \quad . \qquad (31)$$

E k s p o n e n t i s e z b r a j a j u !

Primjer:

$$\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[7]{a^9} = a^{\frac{5}{6}}\cdot a^{\frac{9}{7}} = a^{\frac{5}{6}+\frac{9}{7}} = a^{\frac{89}{42}} = \sqrt[42]{a^{89}} = \underline{a^2\sqrt[42]{a^5}}.$$

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} \qquad (32)$$

E k s p o n e n t i s e o d u z i m a j u !

Primjer:

$$\frac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{\frac{4}{5}-\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{20}} = \underline{\sqrt[20]{x}}.$$

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}} \qquad (33)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} \qquad (34)$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}. \qquad (35)$$

E k s p o n e n t i s e m n o ž e :

Primjer:

$$\left(x^{\frac{5}{7}}\right)^{\frac{7}{5}} = x^{\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{5}} = \underline{x}.$$

Vidimo, da se bez obzira na to da li su eksponenti cijeli ili razlomljeni, pozitivni ili negativni, m n o ž e n j e p o t e n c i j a s i s t i m o s n o v k a m a s v o d i n a z b r a j a n j e, d i j e l j e n j e — n a o d u z i m a n j e, p o t e n c i r a n j e — n a m n o ž e n j e, a v a đ e n j e — k o r i j e n a — n a d i j e l j e n j e e k s p o n e n a t a. Također vrijede, bez izuzetka, za potencije s bilo kakvim realnim eksponentom i sva ostala pravila.

Primjer:

$$\sqrt[4]{\left(\frac{a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{2}}}{c^{\frac{4}{5}}}\right)^{-\frac{8}{15}}} = \left[\left(\frac{a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{2}}}{c^{\frac{4}{5}}}\right)^{-\frac{8}{15}}\right]^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{2}}}{c^{\frac{4}{5}}}\right)^{-\frac{2}{15}} =$$

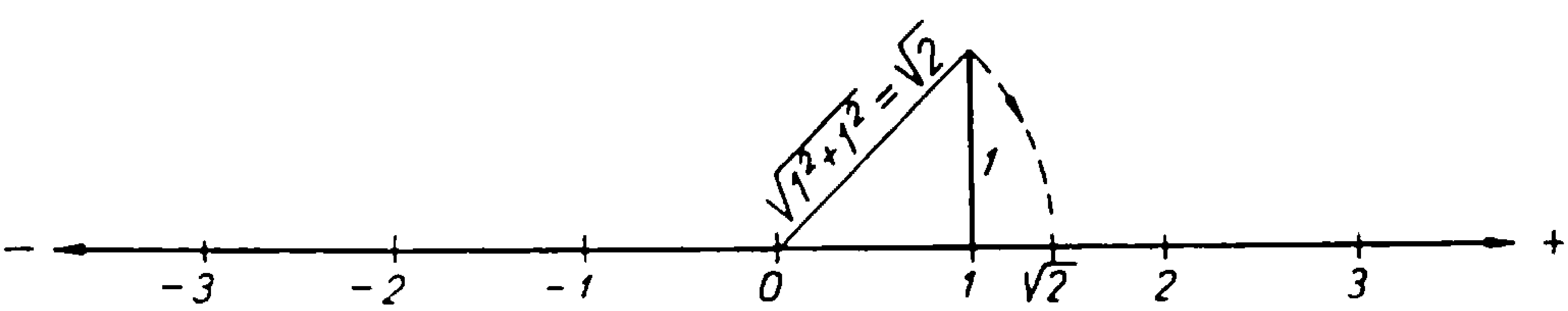
$$= \frac{a^{-\frac{1}{10}}b^{\frac{1}{15}}}{c^{-\frac{8}{75}}} = \frac{b^{\frac{1}{15}}c^{\frac{8}{75}}}{a^{\frac{1}{10}}} = \frac{b^{\frac{10}{150}}c^{\frac{16}{150}}}{a^{\frac{15}{150}}} = \underline{\sqrt[150]{\frac{b^{10}c^{16}}{a^{15}}}}.$$

§ 4. O BROJEVIMA

1. REALNI BROJEVI: RACIONALNI I IRACIONALNI

$\sqrt[n]{a}$ je cijeli broj samo tada, kada je sam radikand *a* n-ta potencija cijelog broja. Tako su $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, . . . ; $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{27}$, . . . cijeli brojevi, dok $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, . . . ; $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, . . . nisu cijeli brojevi. Oni ne mogu biti ni razlomci, jer kvadrat, kub itd. razlomka nije nikad cijeli broj, niti beskonačni decimalni razlomci, jer bi se inače dali pretvoriti u obične razlomke. Vađenje korijena vodi nas, dakle, do nove vrste brojeva koji se zovu i r a c i o n a l n i b r o j e v i, dok se svi ostali brojevi, do kojih se dolazi zbrajanjem, oduzimanjem, množenjem i potenciranjem brojeva, zovu r a c i o n a l n i b r o j e v i.

Npr. $\sqrt{2}$ je iracionalan broj, koji možemo samo približno izračunati. Uzmemo li $\sqrt{2}$ na tri decimale tačno, tj. $\sqrt{2} = 1{,}414$, ne znači to ništa drugo nego da iracionalni broj $\sqrt{2}$ leži između racionalnih brojeva 1,414 i 1,415. Možemo naravno računajući daljnje decimale sve više i više stezati racionalne granice u kojima leži $\sqrt{2}$, pa njegovu vrijednost dobiti po v o l j i t a č n o, ali do prave vrijednosti $\sqrt{2}$ nećemo nikada doći. Iracionalni brojevi prikazuju se prema tome u obliku beskonačnih ali n e p e r i o d s k i h decimalnih razlomaka. Racionalni i iracionalni brojevi čine zajedno skup r e a l n i h b r o j e v a. Njihov položaj možemo predočiti na brojnom pravcu.



Brojni pravac

Slika prikazuje konstrukciju položaja iracionalnog broja $\sqrt{2}$ na brojnom pravcu.

Primjetimo još da su broj $\pi = 3{,}14159\ldots$, broj $e = 2{,}71828\ldots$, modul Briggsovih logaritama $M = 0{,}43429\ldots$ itd. također iracionalni brojevi, ali njihov položaj na brojnom pravcu ne možemo tačno konstruirati pomoću šestara i ravnala.

2. IMAGINARNI I KOMPLEKSNI BROJEVI

Znamo već da drugi korijen iz negativnog broja nema realnog značenja, jer je kvadrat pozitivnog i negativnog broja uvijek pozitivan. Tu nas vađenje korijena opet vodi do nove vrste brojeva, do i m a g i n a r n i h brojeva.

Uzima se ovako:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a \cdot (-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = i\sqrt{a}$$
$$i = \sqrt{-1} = \text{imaginarna jedinica,} \tag{36}$$

pri čemu se pretpostavlja da je

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1,$$
$$\text{pa je } i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = +1 \tag{36a}$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = +1 \cdot i = i$$
$$\text{itd.}$$

Algebarski zbroj realnog i imaginarnog broja zove se k o m p l e k s n i b r o j. Npr. $-3 + 2i$, općenito: $a + bi$.

Dva kompleksna broja, koja se razlikuju samo u predznaku imaginarnog dijela, zovu se k o n j u g i r a n o k o m p l e k s n i b r o j e v i. Npr. $-3 + 2i$ i $-3 - 2i$, općenito $a \pm bi$.

Do konjugirano kompleksnih brojeva dolazimo rješavajući kvadratne jednadžbe (vidi § 11. 3).

Imaginarne i kompleksne brojeve ne možemo naći na našem brojnom pravcu, jer taj sadržava samo tačke realnih apscisa.

Za predočivanje kompleksnih brojeva potrebna je cijela ravnina (imaginarna).

§ 5. RASTAVLJANJE POLINOMA I BINOMA U MNOŽITELJE

$$am + bn - cm + bm + an - cn = (a + b - c)\,m + (a + b - c)\,n = $$
$$= (a + b - c)\,(m + n)$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b) \qquad (37)$$

$$a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)\,(a^2 - b^2) = (a + b)\,(a - b)\,(a^2 + b^2) = $$
$$= (a - b)\,(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) \qquad (38)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2) \qquad (39)$$

$a^4 + b^4$ = ne može se rastaviti u realne množitelje, osim u posebnim slučajevima, kada je npr. $b = 1$:

$$a^4 + 1 = a^4 + 1 + 2a^2 - 2a^2 = (a^4 + 2a^2 + 1) - 2a^2 = \text{prema (46)} = $$
$$= (a^2 + 1)^2 - 2a^2 = (a^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}a)^2 = \text{prema (37)} = $$
$$= (a^2 + 1 + a\sqrt{2})\,(a^2 + 1 - a\sqrt{2}) \qquad (39a)$$

$$a^5 + b^5 = (a + b)\,(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \qquad (40)$$

$$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)\,(a^4 - a^2b^2 + b^4)$$

itd.

$$a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2) \qquad (41)$$

$$a^5 - b^5 = (a - b)\,(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) \qquad (42)$$

$$a^6 - b^6 = (a^3 + b^3)\,(a^3 - b^3) = $$
$$= (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)\,(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = $$
$$= (a - b)\,(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5) \qquad (42a)$$

itd.

Pazi: Ako zadani binom, pa dakle i prvi množitelj desne strane predočuje razliku, svi su članovi u drugom množitelju pozitivni, a ako predočuje sumu, prvi množitelj desne strane predočuje sumu, a u drugom množitelju predznaci plus i minus slijede naizmjence. Usporedi npr. (41) i (39), (42) i (40) itd.

Primjere vidi § 6.

§ 6. RACIONALIZIRANJE NAZIVNIKA

Ako je nazivnik nekog razlomka iracionalan, tj. sadrži izraz ili izraze pod korijenom, on se obično r a c i o n a l i z i r a, tj. udešava se tako da se ti korijeni uklone. To se postizava time da se brojnik i nazivnik dotičnog razlomka pomnože s istim zgodno odabranim izrazom. Pokažimo taj postupak na primjerima:

1. $$\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$

2. $$\frac{7}{5\sqrt[3]{9}}=\frac{7\sqrt{3}}{5\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3}}=\frac{7\sqrt[3]{3}}{5\sqrt[3]{27}}=\frac{7\sqrt[3]{3}}{5\cdot 3}=\frac{7}{15}\sqrt[3]{3}.$$

3. $$\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=\frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}=\text{prema (37)}=$$

$$=\frac{3+2\sqrt{3}}{9-8}=3+2\sqrt{2}.$$

4. $$\frac{1}{3\sqrt{7}+2\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{7}-2\sqrt{5}}{(3\sqrt{7}+2\sqrt{5})(3\sqrt{7}-2\sqrt{5})}=\text{prema (37)}=$$

$$=\frac{3\sqrt{7}-2\sqrt{5}}{63-20}=\frac{3\sqrt{7}-2\sqrt{5}}{43}.$$

5. $$\frac{a}{\sqrt[4]{b}-\sqrt{c}}=\frac{a\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt[4]{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt{c}\right)}=\text{prema (37)}=$$

$$=\frac{a\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt{c}\right)}{\sqrt{b}-c}=\frac{a\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt{c}\right)(\sqrt{b}+c)}{(\sqrt{b}-c)(\sqrt{b}+c)}=$$

$$=\frac{a\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt{c}\right)(\sqrt{b}+c)}{b-c^2}.$$

6. $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=$

Kako je prema (39)

$$b+c=\left(\sqrt[3]{b}\right)^3+\left(\sqrt[3]{c}\right)^3=\left(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)\left(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2}\right),$$

proširujemo drugim množiteljem zadani razlomak i dobivamo:

$$=\frac{a\left(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2}\right)}{b+c}.$$

§ 7. RAZMJER (PROPORCIJA)

$$a : b = c : d$$

ili:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Slijedi:

$$ad = bc \tag{43}$$

Umnožak vanjskih članova jednak je umnošku unutarnjih članova.

Odatle:

$$a = \frac{bc}{d}$$

i:

$$b = \frac{ad}{c} \tag{43a}$$

Svaki vanjski (nutarnji) član razmjera jednak je umnošku nutarnjih (vanjskih) članova kroz sve ostale vanjske (nutarnje) članove.

Primjer:

1. Izračunaj x iz $\frac{3a^2b}{7cd^3} = \frac{15c^5x}{8b^2d^2}$

$$x = \frac{3a^2b \cdot 8b^2d^2}{7cd^3 \cdot 15c^5} = \underline{\frac{8a^2b^3}{35c^6d}}.$$

2. Izračunaj x iz $12a^7b^3c = \frac{5c^7d^3}{2ab^2c^4x}$.

Predočivši zadani izraz u obliku:

$\frac{12a^7b^3c}{1} = \frac{5c^7d^3}{3ab^2c^4x}$, dobijemo po istom pravilu:

$$x = \underline{\frac{5c^7d^3}{36a^8b^5c^5}}.$$

U razmjeru $a : b = b : d$

$$b = \sqrt{ad} = \text{srednja geometrijska proporcionala ili geometrijska sredina.} \tag{44}$$

Iz razmjera $a : b = c : d$ slijede novi razmjeri:

$$\left.\begin{aligned} a : c &= b : d; \\ b : a &= d : c \\ an : bn &= c : d \\ \frac{a}{n} : \frac{b}{n} &= c : d \\ (a \pm b) : (c \pm d) &= a : c \\ &= b : d \\ (a + b) : (a - b) &= (c + d) : (c - d) \end{aligned}\right| \qquad (45)$$

jer za sve te jednakosti vrijedi $ad = bc$. Vidi (43).

§ 8. TROJNO PRAVILO

Mijenja li se jedna veličina zajedno sa drugom, tada se kaže da ta veličina zavisi od druge. Tako npr. put što ga prevali neko vozilo u određenom razmaku vremena zavisi od brzine tog vozila, ili npr. vrijeme koje je potrebno da se izvrši neka radnja ovisi o broju uposlenih radnika. U prvom će slučaju prevaljeni put rasti s vremenom, jer što je veća brzina vozila, to je veći prevaljeni put. Kaže se: brzina vozila i prevaljeni put su upravno razmjerni (upravno proporcionalni). U drugom će se slučaju trajanje rada smanjiti, ako se broj radnika poveća, jer što je veći broj uposlenih radnika, to je kraći rok, u kojem će se dotični posao napraviti. Kaže se: broj uposlenih radnika i trajanje rada su obratno razmjerni (obratno proporcionalni). Ako je zakon međusobne zavisnosti dviju veličina zadan u nekom određenom slučaju, tada se mogu računskim putem izvesti zaključci za sve druge slučajeve koji spadaju pod isti zakon. Trojno pravilo rješava zadatke te vrste. Postupak je uvijek isti: na temelju podataka zadanog slučaja prelazi se od množine na jedinicu, a zatim za traženi slučaj od jedinice na novu množinu.

1. UPRAVNI RAZMJER

Primjer:

Auto prevaljuje za $2^1/_2$ sata 85 km. Koliki će put prevaliti za 5 sati i 48 minuta?

Uzevši u obzir da su 5 sati 48 minuta = 5,8 sati (jer je sat = 60 minuta, dakle 6 minuta = 0,1 sat, 48 : 6 = 8), rastavljamo zadatak u tri stavka:

za 2,5 sata	auto prevaljuje	....	85 km
a za 1 sat	auto prevaljuje	85 : 2,5 =	34 km
pa će za 5,8 sati	prevaliti	34 · 5,8 =	197,2 km

Praktički se postupa kraće:

2,5 85

5,8 x

Piše se razmjer: $\dfrac{2,5}{5,8} = \dfrac{85}{x}$,

pa se računa x prema (43a);

$$x = \frac{5,8 \cdot 85}{2,5} = \underline{197,2 \text{ km.}}$$

Po trojnom pravilu vrši se također interpolacija (vidi § 14. 1).

2. OBRATNI RAZMJER

Primjer:

6 radnika naprave posao za 4 dana. Za koliko će dana napraviti isti posao 8 radnika?

6 radnika trebaju 4 dana
1 radnik treba $4 \cdot 6 = 24$ dana
8 radnika trebaju $24 : 8 = 3$ dana.

Isto, kraće: 6 4
8 x

$$\frac{6}{8} = \frac{x}{4} \text{ (Pazi: ne } \frac{4}{x}\text{, već } \frac{x}{4} \text{ — obratni razmjer!)}$$

Odatle prema (43a) $x = \frac{6 \cdot 4}{8} = \underline{3 \text{ dana.}}$

Slično se rješavaju zadaci za složeno trojno pravilo.

Primjer: Mjesečni račun Električne centrale iznosi Din 70.— za 5 žarulja, koje dnevno gore 7 sati. Koji će iznos doseći račun ako 11 žarulja gore dnevno 9 sati?

5 žarulja dnevno 7 sati	....	70,00 Din
1 žarulja dnevno 7 sati	70,00 : 5 =	14,00 Din
1 žarulja dnevno 1 sat	14,00 : 7 =	2,00 Din
11 žarulja dnevno 1 sat	2,00 · 11 =	22,00 Din
11 žarulja dnevno 9 sati	22,00 · 9 =	<u>198,00 Din</u>

Isto kraće: 5 .... 7 70,00
11 .... 9 x

$$x = \frac{70{,}00 \cdot 11 \cdot 9}{5 \cdot 7} = \underline{198{,}00 \text{ Din.}}$$

§ 9. POSTOTNI RAČUN

Trebamo riješiti pitanje:

Jedna se cesta uspinje na 500 m duljine za 13 m, a druga na 400 m duljine za 10 m. Koja cesta ima veći uspon?

Da bismo mogli usporediti uspone cesta, moramo ih odrediti za istu duljinu. Stoga računamo uspon obiju cesta za 100 m njihove duljine. Uspon prve ceste iznosi $13 : 5 = 2{,}6$ m, a uspon druge ceste $10 : 4 = 2{,}5$ m na 100 m.

Prva cesta ima dakle veći uspon.

Kažemo: uspon prve ceste iznosi 2,6 posto ili 2,6 procenata i pišemo 2,6%, a uspon druge ceste 2,5%.

Postotak (procent) % je dakle broj koji kazuje koliko jedinica dolazi na svakih 100 jedinica.

U postotnom računu dolaze uvijek tri veličine: osnovna svota od koje računamo postotke (u našem primjeru duljina ceste), postotni iznos od osnovne svote (uspon na cjelokupnoj duljini ceste) i postotak ili procent (uspon na 100 m duljine ceste). Ako su zadane dvije veličine, treća se može uvijek izračunati. Izračunavanje se vrši po *trojnom pravilu* (upravni razmjer, vidi § 8).

Pazi: osnovna svota čini uvijek 100%!

1. Račun postotnog iznosa

Primjer:

Koliko je 15% od 480 Din?

100% čini 480 Din

1% čini $\frac{480}{100}$ Din

15% čine $\frac{480}{100} \cdot 15 = \underline{72 \text{ Din.}}$

Isto, kraće: 100% .... 480 Din

15% x

$$\frac{100}{15} = \frac{480}{x}, \text{ a odatle prema (43a)}$$

$$x = \frac{480 \cdot 15}{100} = \underline{72 \text{ Din.}}$$

Općenito:

$$\text{Postotni iznos} = \frac{\text{osnovna svota} \cdot \text{postotak}}{100}.$$

2. Račun postotka (procenta)

Primjeri: 1. Koliko posto čine 70 m od 420 m?

$$420 \text{ m čine } 100\%$$

$$1 \text{ m čini } \frac{100}{420}\%$$

$$70 \text{ m čine } \frac{100}{420} \cdot 70 = \underline{16\frac{2}{3}\%}.$$

Isto, kraće:

420 m 100%

70 m x

$$\frac{420}{70} = \frac{100}{x}, \text{ odatle prema (43a)}$$

$$x = \frac{70 \cdot 100}{420} = \underline{16\frac{2}{3}\%}.$$

2. 2,5 g kuhinjske soli rastopljeno je u 30 g vode. Koliko procenata soli sadrži otopina?

Cjelokupna težina otopine iznosi 30 + 2,5 = 32,5 g, dakle

32,5 g 100%

2,5 g x

$$\frac{32{,}5}{2{,}5} = \frac{100}{x} \quad ; \quad x = \frac{2{,}5 \cdot 100}{32{,}5} = \underline{7{,}69\%}.$$

Općenito:

$$\text{postotak} = \frac{\text{postotni iznos} \cdot 100}{\text{osnovna svota}}.$$

3. Račun osnovne svote

Primjer:

24% množine neke tekućine iznosi 46,86 hl. Kolika je cjelokupna množina tekućine?

24% su 46,86 hl

$$1\% \text{ je } \frac{46{,}86}{24} \text{ hl}$$

$$100\% \text{ su } \frac{46{,}86}{24} \cdot 100 \text{ hl} = \underline{195{,}25 \text{ hl}}.$$

Isto, kraće:

$$24\% \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 46,86$$

$$100\% \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x$$

$$\frac{24}{100} = \frac{46,86}{x}, \text{ odatle prema (43a)}$$

$$x = \frac{46,86 \cdot 100}{24} = \underline{195,25 \text{ hl.}}$$

Općenito:

$$\text{osnovna svota} = \frac{\text{postotni iznos} \cdot 100}{\text{postotak}}.$$

Često se mjesto procenata (%) upotrebljavaju promili (‰). **Promil** je broj koji kazuje koliko jedinica dolazi na svakih 1000 jedinica.

Npr. ako se kaže da uspon željezničke pruge iznosi 15‰, to znači da se pruga uspinje za 15 m na 1000 m duljine.

§ 10. POTENCIRANJE BINOMA. BINOMNI POUČAK. KVADRAT TRINOMA I POLINOMA

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad (46)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \qquad (47)$$

Koeficijenti pojedinih članova razvoja izlaze iz Pascalova trokuta.

Koeficijenti za potenciju	n
1	0
1 1	1
1 2 1	2
1 3 3 1	3
1 4 6 4 1	4
1 5 10 10 5 1	5
1 6 15 20 15 6 1	6
itd.	

Svaki koeficijent jednak je zbroju dvaju brojeva koji stoje lijevo i desno iznad njega.

Npr. $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Ako je b negativan, mijenjat će se u desnoj strani naizmjence + i —,

$$\text{jer je } (-b)^{2n} = +b^{2n},$$

$$\text{a } (-b)^{2n+1} = -b^{2n+1}$$

Npr.:

$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

Za razvoj $(a + b)^n$, gdje je n cijeli pozitivni broj, može se pokazati da će analogno imati $(n + 1)$ član, da će eksponenti od a padati od n do 0, a od b rasti od 0 do n, tako da će zbroj eksponenata u svakom članu iznositi n, i da će koeficijenti članova jednako udaljenih od početka i kraja razvoja biti međusobno jednaki.

Taj razvoj glasi:

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \\ + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)\ldots\ldots[n-(n-2)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots(n-1)}ab^{n-1} + \\ + \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots n}b^n\end{aligned}\right| \quad (48)$$

Primjer:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}a^3b^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}a^2b^3 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}ab^4 +$$

$$+ \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}b^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a\,b^4 + b^5.$$

Radi kraćeg pisanja uvedeni su za binomne koeficijente simboli:

$$n = \binom{n}{1} \qquad \text{(čitaj »}n\text{ nad 1«)}$$

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2} = \binom{n}{2} \qquad \text{(čitaj »}n\text{ nad 2«)}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \binom{n}{3} \qquad \text{itd.}$$

Pri tome račun pokazuje da je:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots[n-(n-4)]\,[n-(n-3)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots\ldots\ldots(n-3)\cdot(n-2)} =$$

$$= \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} = \binom{n}{2}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots[n-(n-3)]\,[n-(n-2)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots\ldots\ldots(n-2)\cdot(n-1)} = \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots[n-(n-2)]\,[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots\ldots\ldots(n-1)\cdot n} = \binom{n}{n} = 1$$

općenito: $$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots[n-(k-2)]\,[n-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots\ldots\ldots(k-1)\cdot k} = \binom{n}{n-k}.$$

Npr.: $\binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35.$ $\quad \binom{8}{6} = \binom{8}{8-6} = \binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2} = 28.$

Pazi! Najprije pišemo nazivnik ($1 \cdot 2 \cdot 3$, odnosno $1 \cdot 2$), a zatim brojnik ($7 \cdot 6 \cdot 5$, odnosno $8 \cdot 7$) koji ima isti broj množitelja kao nazivnik.

Sada možemo napisati tzv. binomni poučak u konačnom obliku:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \dots \quad \dots + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{1} a b^{n-1} + b^n \qquad (48a)$$

Umnožak svih cijelih pozitivnih brojeva od 1 do n, to jest $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n$ označuje se simbolom $n!$ (Čitaj »n faktoriela«).

Prema tome:

$2! = 1 \cdot 2 = 2$ $\qquad$ $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24;$ $\qquad$ $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120;$

$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720;$ $\qquad$ $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040;$

itd.

Kvadrat trinoma i polinoma

$$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = \text{prema } (46) =$$
$$= (a+b)^2 + 2(a+b) \cdot c + c^2 =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$
$$\underline{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.}$$

Postupajući na sličan način dobivamo:

$$(a+b+c+d)^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

Iz toga vidimo da je kvadrat polinoma jednak zbroju kvadrata svih njegovih članova i dvostrukih umnožaka svakog člana sa svim onim članovima koji dolaze iza njega.

Jasno je da su kvadrati svih članova uvijek pozitivni, dok su dvostruki umnošci negativni, ako je jedan član pozitivan, a drugi negativan.

Primjer:

$$(3ab^2 - 2a^2b - 5a^3 + 7)^2 =$$
$$= 9a^2b^4 + 4a^4b^2 + 25a^6 + 49 - 12a^3b^3 - 30a^4b^2 + 42ab^2 + 20a^5b - 28a^2b - 70a^3.$$

§ 11. JEDNADŽBE

1. OPĆA PRAVILA

Jednadžbu tvore dva matematička izraza povezana znakom jednakosti, a koju zadovoljavaju samo neke vrijednosti općih brojeva. Nasuprot tome jednakost koju zadovoljavaju bilo koje vrijednosti općih brojeva zove se identitet, npr. jednakost $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nije jednadžba već identitet, jer je zadovoljava svaka vrijednost kuta α.

Korijenom jednadžbe zovemo onu vrijednost nepoznanice koja zadovoljava tu jednadžbu.

a) Jednadžba ostaje pravilna ako se nad njenom lijevom i desnom stranom izvrši ista operacija s istim brojem.

b) Svaki slobodni član jednadžbe može se prenijeti iz jedne strane jednadžbe na drugu, ako se promijeni predznak tog člana.

2. LINEARNE JEDNADŽBE

To su jednadžbe koje sadrže nepoznanice u prvom stupnju.

a) Linearna jednadžba s jednom nepoznanicom

Jednadžba	Korijen (rješenje)
$x + a = b$	$x = b - a$
$x - a = b$	$x = b + a$
$ax = b$	$x = \frac{b}{a}$
$\frac{x}{a} = b$	$x = ab$
$ax = 0$	$x = 0$
$a(x - b) = 0$	$x = b$
$ax + b = 0$	$x = -\frac{b}{a}$

b) Sustav od 2 linearne jednadžbe sa 2 nepoznanice

$$a x + b y = c \qquad (A)$$

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \qquad (B)$$

1. Metoda izjednačenja

Iz (A) slijedi: $$y = \frac{c - ax}{b} \qquad (C)$$

Iz (B) slijedi: $$y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1} \qquad (D)$$

Odatle: $\frac{c - ax}{b} = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1}$ i $bc_1 - ba_1 x = cb_1 - ab_1 x$ ili

$$(ab_1 - ba_1)\, x = cb_1 - bc_1, \quad \text{pa je:}$$

$$x = \frac{cb_1 - bc_1}{ab_1 - ba_1} \qquad (49)$$

Uvrštenje te vrijednosti za x u (C) ili (D) daje:

$$y = \frac{ac_1 - ca_1}{ab_1 - ba_1} \qquad (49a)$$

Primjer:

$$2x + 7y = 11 \qquad (A)$$

$$x + 5y = 7 \qquad (B)$$

Iz (A): $x = \frac{11 - 7y}{2}$.

Iz (B): $x = 7 - 5y$

$$\frac{11 - 7y}{2} = 7 - 5y \mid .2$$

$$11 - 7y = 14 - 10y$$

$$3y = 3$$

$$\underline{y = 1.}$$

Prema (B): $x = 7 - 5$; $\underline{x = 2.}$

2. Metoda uvrštenja

Iz (A) slijedi: $$x = \frac{c - by}{a} \qquad (E).$$

To se uvrsti u (B), pa se dobije jednadžba s jednom nepoznanicom:

$$a_1 \cdot \frac{c - by}{a} + b_1 y = c_1,$$ koja se rješava po y.

x se dobije uvrštenjem vrijednosti y u (E).

Primjer:

$$8x - 5y = -16 \qquad (A)$$
$$10x + 3y = 17 \qquad (B)$$

Iz (A): $x = \frac{5y - 16}{8}$ (C). Uvrstimo u (B):

$$10 \cdot \frac{5y - 16}{8} + 3y = 17$$

$$\frac{5(5y - 16)}{4} + 3y = 17 \;/\cdot 4$$

$$25y - 80 + 12y = 68$$

$$37y = 148$$

$$\underline{y = 4.}$$

Uvrstimo to u (C):

$$x = \frac{5 \cdot 4 - 16}{8} \quad ; \qquad \underline{x = \frac{1}{2}}.$$

3. Metoda jednakih koeficijenata

$$\begin{array}{l|l} a x + b y = c & \cdot b_1 \\ a_1 x + b_1 y = c_1 & \cdot (-b) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} ab_1 x + bb_1 y = cb_1 & \\ -a_1 bx - bb_1 y = -c_1 b & + \end{array}$$

$$(ab_1 - a_1 b)x = cb_1 - c_1 b$$

$$x = \frac{cb_1 - bc_1}{ab_1 - ba_1}$$

Množeći prvu jednadžbu sa a_1, a drugu sa $(-a)$ dobivamo na sličan način:

$$y = \frac{ac_1 - ca_1}{ab_1 - ba_1}.$$

Primjer:

$$\begin{array}{r|l} 7x + 6y = 29 & \cdot 4 \\ -5x + 8y = 10 & \cdot -3 \end{array}$$

Da bismo dobili u obim jednadžbama jednake i n a j m a n j e koeficijente uz y i to protivnog predznaka, odredimo najmanji višekratnik koeficijenata od y, tj. od 6, i 8 (to je 24), pa množimo prvu jednadžbu sa 4, a drugu sa — 3.

$$\begin{array}{r|l} 28x + 24y = 116 & \\ +\ 15x - 24y = -30 & + \\ \hline 43x \qquad\quad = 86 & ; \quad \underline{x = 2.} \end{array}$$

Množeći prvu jednadžbu sa 5, a drugu sa 7, dobivamo na isti način:

$$\underline{y = \frac{5}{2}}\,.$$

Možemo y odrediti i tako da u jednu od zadanih jednadžbi uvrstimo $x = 2$.

4. Metoda determinanata

$$a\,x + b\,y = c$$

$$a_1x + b_1y = c_1$$

Izraz u nazivnicima traženih vrijednosti za x i y, tj. $ab_1 - ba_1$ [vidi (49) i (49a)] zove se d e t e r m i n a n t a zadanog sustava; simbolički se ona bilježi u obliku $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ i ako je označimo sa Δ imamo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - ba_1.$$

Članovi te determinante su koeficijenti od x i y, napisani onim redom kako slijede u jednadžbama.

Način računanja determinante vidi se iz sheme: $\left|\begin{matrix} + & & - \\ & \times & \\ \swarrow & & \searrow \end{matrix}\right|$

U brojnicima izraza za x i y također su determinante koje se dobiju iz determinante sustava $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$, tako da se za x zamijeni prvi stupac koji čine koeficijenti od x, sa članovima desnih strana jednadžaba, a za y zamijeni se istim članovima drugi stupac, koji čine koeficijenti od y.

Prema tome:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} \frac{cb_1 - bc_1}{ab_1 - ba_1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{ac_1 - ca_1}{ab_1 - ba_1}$$

Za x i y dobili smo opet izraze (49) i (49a).

Primjer:

$$\begin{aligned} 3{,}6\,x + 1{,}8\,y &= 2{,}5 \\ 2{,}7\,x - 1{,}9\,y &= -6{,}8 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2{,}5 & 1{,}8 \\ -6{,}8 & -1{,}9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3{,}6 & 1{,}8 \\ 2{,}7 & -1{,}9 \end{vmatrix}} = \frac{2{,}5\cdot(-1{,}9)-(1{,}8)\cdot(-6{,}8)}{3{,}6\cdot(-1{,}9)-1{,}8\cdot 2{,}7} = \frac{7{,}49}{-11{,}70} = \underline{-0{,}640.}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3{,}6 & 2{,}5 \\ 2{,}7 & -6{,}8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3{,}6 & 1{,}8 \\ 2{,}7 & -1{,}9 \end{vmatrix}} = \frac{3{,}6\cdot(-6{,}8)-2{,}5\cdot 2{,}7}{-11{,}70} = \frac{-31{,}23}{-11{,}\ 0} = \underline{+2{,}669.}$$

Rješavanje sustava od 2 linearne jednadžbe sa 2 nepoznanice svodi se na određivanje koordinata presjecišta pravaca koji te jednadžbe predočuju. (Vidi: Analitička geometrija, § 7. 3).

c) Sustav od n linearnih jednadžbi sa n nepoznanica

Rješava se tako da se pomoću jedne od navedenih metoda uklanja jedna nepoznanica, pa se zadani sustav svodi na sustav od $(n-1)$ jednadžbe sa $(n-1)$ nepoznanicom. Taj postupak se ponavlja, dok se ne dobije jedna jednadžba sa jednom nepoznanicom.

Primjer:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z &= 7 && \mid \cdot 8 \mid \cdot 4 \\ 7x + 4y - 8z &= 3 && \mid \cdot 5 \\ 5x - 3y - 4z &= -12 && \mid \cdot 5 \end{aligned}$$

Da bismo uklonili z, množimo 1) prvu jednadžbu sa 8, a drugu sa 5; 2) prvu sa 4, a treću sa 5:

$$\begin{aligned} 24x - 16y + 40z &= 56 \\ 35x + 20y - 40z &= 15 \quad + \\ \hline 59x + 4y \quad &= 71 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 12x - 8y + 20z &= 28 \\ 25x - 15y - 20z &= -60 \quad + \\ \hline 37x - 23y \quad &= -32 \end{aligned}$$

$$\text{(A)} \quad \begin{aligned} 59x + 4y &= 71 && \mid \cdot 23 \\ 37x - 23y &= -32 && \mid \cdot 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1357x + 92y &= 1633 \\ 148x - 92y &= -128 \quad + \\ \hline 1505x \quad &= 1505 \ ; \quad \underline{x = 1.} \end{aligned}$$

Uvrštenje $x = 1$ u (A) daje: $59 + 4y = 71$

odatle: $4y = 12$

$$\underline{y = 3.}$$

Uvrštenje $x = 1$ i $y = 3$ u prvu zadanu jednadžbu daje:

$$\begin{aligned} 24 - 48 + 40z &= 56 \\ 40z &= 80 \\ \underline{z = 2.} \end{aligned}$$

Proba: uvrsti $x = 1$, $y = 3$ i $z = 2$ u zadane jedandžbe!

3. KVADRATNE JEDNADŽBE

a) Rješavanje kvadratne jednadžbe

1) Opća kvadratna jednadžba:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

korijeni:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (50)$$

Izraz pod drugim korijenom, tj. $b^2 - 4ac = D$, zove se diskriminanta kvadratne jednadžbe.

Ako je:

$D > 0$, kvadratna jednadžba ima dva realna različita korijena x_1 i x_2 (vidi dalje primjer 1).

$D = 0$, kvadratna jednadžba ima dva realna jednaka korijena $x_1 = x_2$ (dvostruki korijen, primjer 2).

$D < 0$, kvadratna jednadžba ima par konjugirano kompleksnih korijena, tj. korijena oblika $a \pm bi$, gdje je $i = \sqrt{-1}$ (vidi § 4. 2 i dalje, primjer 3).

Primjer 1.

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}; \qquad (D = 9 > 0)$$

$$\underline{x_1 = \frac{1}{2}}; \qquad \underline{x_2 = -1.}$$

Primjer 2.

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{+6 \pm \sqrt{36-36}}{18}; \qquad (D = 0)$$

$$\underline{x_{1,2} = \frac{1}{3}.}$$

Primjer 3.

$$7x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-84}}{14} = \frac{-5 \pm \sqrt{-59}}{14}; \quad (D = -59 < 0)$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(-1)\cdot 59}}{14} = \frac{-5 \pm i\sqrt{59}}{14},$$

gdje je $i = \sqrt{-1}$ = imaginarna jedinica:

$$\underline{x_1} = \frac{-5 + 7{,}681\, i}{14} = \underline{-0{,}357 + 0{,}549\, i}$$

$$\underline{x_2} = \frac{-5 - 7{,}681\, i}{14} = \underline{-0{,}357 - 0{,}549\, i.}$$

2) Nepotpune kvadratne jednadžbe ne rješavaju se po formuli 50, već neposredno, kako slijedi:

$$\alpha) \quad ax^2 = 0 \mid :a$$

$$x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = 0$$

$$\beta) \quad ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0.$$

Umnožak od dva ili više množitelja jednak je nuli kad je posebno svaki množitelj jednak nuli, ako naravno može da bude nula. Imamo, dakle:

$$x_1 = 0;$$

$$ax + b = 0;$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Primjeri:

$$5x^2 - 3x = 0$$

$$x(5x - 3) = 0$$

$$\underline{x_1 = 0}$$

$$5x - 3 = 0$$

$$5x = 3$$

$$\underline{x_2 = \frac{3}{5}.}$$

$$\gamma) \quad ax^2 + c = 0$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

3) Kvadratna jednadžba kojoj je koeficijent od x^2 jednak 1.

Često se kvadratna jednadžba rješava tako da se prethodno podijeli s koeficijentom od x^2.

$$ax^2 + bx + c = 0 \mid :a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\text{zovemo: } \frac{b}{a} = p; \quad \frac{c}{a} = q,$$

pa dobijemo: $x^2 + px + q = 0$.

$$\text{Korijeni: } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad (51)$$

Pamti tu formulu riječima: $x_{1,2}$ = polovini koeficijenta od x s protivnim predznakom $\pm$ drugi korijen iz kvadrata te polovine i člana bez x, napisanog također s protivnim predznakom.

Primjeri:

$$1 - x - 2x^2 = 0 \mid : -2$$

$$x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \underline{\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \underline{-1}.$$

U tom obliku kvadratne jednadžbe, u kojem je koeficijent od x jednak 1, postoji slijedeća veza između korijena i koeficijenata jednadžbe:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p \\ x_1 \cdot x_2 &= q \end{aligned} \qquad (52)$$

Te jednadžbe lako dobivamo na taj način da uzevši iz (51) vrijednosti za x_1 i x_2 načinimo $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$, pri čemu umnožak računamo prema (37).

Primjer:

Napiši kvadratnu jednadžbu kojoj su korijeni 9 i $-\frac{7}{3}$.

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (A)$$

$$p = ? \quad q = ?$$

Prema (52): $p = -(x_1 + x_2) = -\left[9 + \left(-\frac{7}{3}\right)\right] = -\left(9 - \frac{7}{3}\right) = \underline{-\frac{20}{3}}$

$$q = x_1 \cdot x_2 = 9 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) = \underline{-21.}$$

Uvrštenje u (A) daje:

$$\underline{x^2 - \frac{20}{3}x - 21 = 0}$$

ili, ako obje strane jednadžbe pomnožimo sa 3:

$$\underline{3x^2 - 20x - 63 = 0.}$$

Pokus:

$$x^2 - \frac{20}{3}x - 21 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} + 21} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100 + 189}{9}} = \frac{10}{3} \pm \frac{17}{3}$$

$$\underline{x_1 = 9}\ ; \quad \underline{x_2 = -\frac{7}{3}}.$$

b) Rastavljanje kvadratne jednadžbe u množitelje

$$\left.\begin{aligned} &ax^2 + bx + c = 0 \\ &a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \end{aligned}\right| \tag{53}$$

tu su x_1 i x_2 korijeni zadane jednadžbe,

a za $x_1 = x_2 = x_0$ dobivamo: $a(x - x_0)^2 = 0$ | (53a)

Primjer:

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\ ; \quad x_2 = -1$$

$$\underline{2x^2 + x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1).}$$

Na isti način vrši se rastavljanje u množitelje jednadžbi višeg stupnja. Iz navedenog slijedi da, ako je x_1 jedan od korijena jednadžbe, tada je ta jednadžba djeljiva bez ostatka sa $(x - x_1)$. Ta činjenica daje mogućnost, pogodivši jedan od korijena kubne jednadžbe, izračunati ostala dva korijena pa možemo svesti kubnu jednadžbu na kvadratnu.

Primjer:

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$$

Kušanjem određujemo prvi korijen jednadžbe. Taj je $x_1 = -1$, jer je

$$(-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6 = -1 + 2 + 5 - 6 = 0.$$

Dijelimo jednadžbu sa $x - x_1 = x + 1$ (vidi § 2, 3):

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x + 1) = x^2 + x - 6 \\
\underline{\pm x^3 \pm x^2} \\
\qquad x^2 - 5x \\
\qquad \underline{\pm x^2 \pm x} \\
\qquad\qquad -6x - 6 \\
\qquad\qquad \underline{\mp 6x \mp 6} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

pa rješavamo kvadratnu jednadžbu:

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2$$

$$x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -3$$

Korijeni jednadžbe jesu :

$$\underline{x_1 = -1}$$
$$\underline{x_2 = 2}$$
$$\underline{x_3 = -3}$$

Zadanu jednadžbu možemo dakle predočiti u obliku:

$$(x + 1)(x - 2)(x + 3) = 0.$$

4. JEDNADŽBE VIŠEG STUPNJA KOJE SE SVODE NA KVADRATNE

a) Bikvadratne jednadžbe

Tako se zovu jednadžbe četvrtog stupnja koje sadrže samo parne potencije nepoznanice.

Opći oblik: $ax^4 + bx^2 + c = 0.$

Svodi se na kvadratnu jednadžbu tako da se stavi: $x^2 = y$, pa jednadžba poprima oblik:

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Odatle, prema (50): $y_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

a iz $x^2 = y$ slijedi: $x = \pm\sqrt{y}.$

Prema tome:

$$x_1 = +\sqrt{y_1} \ ; \quad x_2 = -\sqrt{y_1}$$

$$x_3 = +\sqrt{y_2} \ ; \quad x_4 = -\sqrt{y_2}$$

Primjer:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$x^2 = y$$

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$y_1 = 9; \quad y_2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{y}\,; \quad \underline{x_1} = +\sqrt{9} = \underline{3}\,; \quad \underline{x_2} = -\sqrt{9} = \underline{-3}$$

$$\underline{x_3} = +\sqrt{4} = \underline{2}\,; \quad \underline{x_4} = -\sqrt{4} = \underline{-2}.$$

b) Recipročne ili simetrične jednadžbe

Tako se zovu jednadžbe u kojima su jednaki ili protivni koeficijenti članova jednako udaljenih od početka i kraja lijeve strane jednadžbe.

Recipročna jednadžba trećeg stupnja ima oblik

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0,$$

a rješava se tako da se spoje članovi s jednakim ili protivnim koeficijentima, pa se izluči zajednički faktor $(x + 1)$, odnosno $(x - 1)$. Na taj način jednadžba se raspada u dvije jednadžbe, jednu linearnu i jednu kvadratnu.

Primjer:

$$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$2(x^3 - 1) + 3x(x - 1) = 0$$

Prema (41):

$$2(x - 1)(x^2 + x + 1) + 3x(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(2x^2 + 2x + 2 + 3x) = 0$$

$$x - 1 = 0; \qquad \underline{x_1 = 1}$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 0 \mid :2$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0$$

$$x_{2,3} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = -\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}$$

$$\underline{x_2} = -\frac{5}{4} + \frac{3}{4} = \underline{-\frac{1}{2}}$$

$$\underline{x_3} = -\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \underline{-2.}$$

R e c i p r o č n a j e d n a d ž b a č e t v r t o g s t u p n j a ima oblik:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

Obje strane jednadžbe dijelimo sa x^2, što je dopušteno, jer je $x^2 \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

ili $$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0,$$

stavimo: $x + \dfrac{1}{x} = y$, tada je kvadrat $x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2$

ili $$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Uvrštenje daje kvadratnu jednadžbu:

$a(y^2 - 2) + by + c = 0$, čije korijene označimo sa $y_1 = \alpha$; $y_2 = \beta$.

Tada je: $x + \dfrac{1}{x} = \alpha$ i $x + \dfrac{1}{x} = \beta$

ili $x^2 - \alpha x + 1 = 0$ i $x^2 - \beta x + 1 = 0$.

Iz tih jednadžbi dobivamo četiri korijena zadane jednadžbe.

Primjer:

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0 \mid : x^2$$

$$6x^2 - 35x + 62 - \frac{35}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$$

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = y \mid^2$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2 \ ; \ x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$6(y^2 - 2) - 35y + 62 = 0$$

$$6y^2 - 35y + 50 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{1225 - 1200}}{12}$$

$$y_1 = \frac{10}{3}; \qquad y_2 = \frac{5}{2}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \quad | \cdot x$$

$$x^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9} - 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{5}{3} \pm \frac{4}{3}$$

$$\underline{x_1 = 3}$$

$$\underline{x_2 = \frac{1}{3}}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \quad | \cdot x$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$$

$$x_{3,4} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1}$$

$$x_{3,4} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}$$

$$\underline{x_3 = 2}$$

$$\underline{x_4 = \frac{1}{2}.}$$

Opažamo da je $x_2 = \frac{1}{x_1}$ i $x_4 = \frac{1}{x_3}$, tj. x_1, x_2, i x_3, x_4 su recipročni; odatle slijedi naziv jednadžbe.

Recipročna jednadžba petog stupnja svodi se na jednu linearnu i jednu recipročnu jednadžbu četvrtog stupnja, i to tako da se spoje članovi s istim ili protivnim koeficijentima, pa se izluči zajednički množitelj $(x + 1)$, odnosno $(x - 1)$.

Uputa za rješavanje recipročnih jednadžbi: Ako jednadžba ima paran broj članova, spajamo članove s istim, odnosno protivnim koeficijentima (recipročne jednadžbe 3. i 5. stupnja), a ako je broj članova neparan, dijelimo jednadžbu sa x^2 (recipročne jednadžbe 4. stupnja).

c) Binomne jednadžbe

To su jednadžbe oblika:

$$y^n \pm a = 0,$$

koji svodimo na jednostavniji oblik:

$$x^n \pm 1 = 0$$

i to tako da jednadžbu podijelimo sa a pa stavimo $\frac{y^n}{a} = x^n$.

Odatle je $y^n = ax^n$, a uvrštenje u zadanu jednadžbu daje:

$$ax^n \pm a = 0$$

ili: $$a(x^n \pm 1) = 0 \quad | : a$$

$$\underline{x^n \pm 1 = 0.}$$

Binomne jednadžbe rješavaju se tako da se jednadžba rastavi u množitelje, pri čemu treba uvijek držati na pameti da svaka jednadžba n-tog stupnja ima n korijena realnih ili kompleksnih (imaginarnih).

Navedimo nekoliko primjera:

1. $x^3 - 1 = 0$

Prema (41) : $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

$$x - 1 = 0; \quad \underline{x_1 = 1}$$

$$x^2 + x + 1 = 0; \; x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$$

$$x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i \sqrt{3}$$

$$\underline{x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}}, \qquad \underline{x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}}$$

2. $x^3 + 1 = 0$. Rješava se slično.

3. $x^4 - 1 = 0$

Prema (38): $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1) = 0$

$$x + 1 = 0, \quad \underline{x_1 = -1}$$

$$x - 1 = 0, \quad \underline{x_2 = 1}$$

$$x^2 + 1 = 0, \quad x^2 = -1 \qquad \underline{x_{3,4}} = \pm\sqrt{-1} = \underline{\pm i.}$$

4. $x^4 + 1 = 0$

Prema (39a) : $(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1) = 0$

$$x^2 + x\sqrt{2} + 1 = 0, \; x_{1,2} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{2}{4} - 1} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}}$$

$$\underline{x_{1,2}} = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i).}$$

Na sličan način dobivano iz

$$x^2 - x\sqrt{2} + 1 = 0$$

$$\underline{x_{3,4}} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i).}$$

5. $x^5 + 1 = 0$

Prema (40) : $(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = 0$

$$x + 1 = 0; \quad \underline{x_1 = -1}$$

$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$. To je recipročna jednadžba. Vidi tačku b) istog paragrafa.

6. $x^5 - 1 = 0$. Rješava se slično.

7. $x^6 + 1 = 0$.

Kako je prema (36a) $i^2 = -1$, odnosno $1 = -i^2$, možemo pisati:

$x^6 - i^2 = 0$, a odatle prema (37):

$$(x^3 + i)\,(x^3 - i) = 0.$$

Izlučimo i iz svake zagrade:

$$i\left(\frac{x^3}{i} + 1\right)\, i\left(\frac{x^3}{i} - 1\right) = 0, \quad \text{ili prema (36a):}$$

$$-\left(\frac{x^3}{i} + 1\right)\left(\frac{x^3}{i} - 1\right) = 0.$$

Stavimo li $\frac{x^3}{i} = y^3$, dobivamo:

$$(y^3 + 1)\,(y^3 - 1) = 0 \quad \text{ili}$$

$y^3 + 1 = 0$ i $y^3 - 1 = 0$, a te jednadžbe znamo riješiti (vidi primjere 1 i 2).

Šest dobivenih vrijednosti za y uvrštavamo u $x = -iy$, jer iz naše supstitucije $\frac{x^3}{i} = y^3$, ako u nju prema (36a) uvrstimo $i = -i^3$, slijedi:

$$\frac{x^3}{-i^3} = y^3, \text{ a odatle je } x^3 = -i^3y^3 \quad \text{ili} \quad x = -iy.$$

8. $x^6 - 1 = 0$.

Prema (42a) $(x^3 + 1)\,(x^3 - 1) = 0$ itd.

P r i m j e d b a: Samo za korijene općih jednadžbi 3. i 4. stupnja postoje opće formule dok se jednadžbe viših stupnjeva ne mogu algebarski riješiti. (Abelov teorem). Međutim, ako te jednadžbe imaju brojčane koeficijente, možemo ih na više načina približno riješiti i to po volji tačno. To pitanje spada u višu matematiku.

§ 12. NEJEDNADŽBE

1. POJAM I OSNOVNA SVOJSTVA NEJEDNADŽBI

Spojimo li dvije veličine izražene brojevima ili slovima znakom $>$ (veći od) ili znakom $<$ (manji od), dobit ćemo nejednadžbu.

Nejednadžba je brojčana ako je izražena brojevima, npr. $15 > 7$ ili $-5 < -3$, odnosno $a > b$ ili $c < d$, ako je izražena slovima.

Nejednadžba je odredbena ako sadrži nepoznanice koje se, kao i kod jednadžbi, označuju posljednjim slovima alfabeta. Npr. $2x - 4 > 10$. Navedimo osnovna svojstva nejednadžbi:

1) Ako je $a > b$, tada je $b < a$; ili

ako je $a < b$, tada je $b > a$.

2) Ako je $a > b$ i $b > c$, tada je i $a > c$ ili

ako je $a < b$ i $b < c$, tada je $a < c$.

Npr. $6 < 11$; $11 < 15$, pa je $6 < 15$.

3) Smisao se nejednadžbe ne mijenja ili, kako se kaže, dobivena nejednadžba ostaje ekvivalentna sa zadanom ako lijevoj i desnoj strani nejednadžbe dodamo ili oduzmemo iste veličine, tj.:

$$\begin{array}{rcl} a & > & b \\ \pm c & & \pm c \\ \hline a \pm c & > & b \pm c \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} a & < & b \\ \pm c & & \pm c \\ \hline a \pm c & < & b \pm c \end{array}$$

Npr.:

$$\begin{array}{rcl} 17 & > & 10 \\ \pm 3 & & \pm 3 \\ \hline 20 & > & 13 \\ 14 & > & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 5 & < & 8 \\ \pm 10 & & \pm 10 \\ \hline 15 & < & 18 \\ -5 & < & -2 \end{array}$$

Iz navedenog slijedi da u nejednadžbi, kao i u jednadžbi, možemo svaki član prenijeti s jedne strane na drugu ako mu promijenimo predznak.

Npr.:

$$4x - 3 > -x + 7$$

$$4x + x > 3 + 7$$

$$5x > 10$$

4) Dvije nejednadžbe istog smisla možemo zbrajati član po član:

$$\begin{array}{c|c} a > b & \\ c > d & + \\ \hline a + c > b + d & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} a < b & \\ c < d & + \\ \hline a + c < b + d & \end{array}$$

Npr.:

$$\begin{array}{r|c} 3 > 2 & \\ 7 > 4 & + \\ \hline 10 > 6 & \end{array} \quad \begin{array}{r|c} 4 < 6 & \\ 5 < 8 & + \\ \hline 9 < 14 & \end{array} \quad \begin{array}{r|c} -5 < -2 & \\ -7 < -4 & + \\ \hline -12 < -6 & \end{array} \quad \begin{array}{r|c} -4 > -6 & \\ -3 > -5 & + \\ \hline -7 > -11 & \end{array}$$

5) Nejednadžba ne mijenja znak, tj. ostaje ekvivalentna, ako se od te nejednadžbe oduzme, član po član, druga nejednadžba protivnog smisla. Ne smije se oduzimati član po član nejednadžbe istog smisla.

$$\begin{array}{c|c} a > b & \\ c < d & - \\ \hline a - c > b - d & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} a < b & \\ c > d & - \\ \hline a - c < b - d & \end{array}$$

Npr.:

$$\begin{array}{r|c} 7 > 5 & \\ 8 < 12 & - \\ \hline -1 > -7 & \end{array} \quad \begin{array}{r|c} 5 > 3 & \\ -3 < -2 & - \\ \hline 8 > 5 & \end{array} \quad \begin{array}{r|c} -9 < -7 & \\ 5 > 4 & - \\ \hline -14 < -11 & \end{array}$$

6) Ako obje strane nejednadžbe pomnožimo ili podijelimo s istim pozitivnim brojem, dobit ćemo nejednadžbu istog smisla.

Ako je $a > b$ i $c > 0$; tada je $ac > bc$ i $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Ako je $a < b$ i $c > 0$; tada je $ac < bc$ i $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Npr. $16 > 12 \mid \cdot \mid : 2$

$32 > 24;$

$5x > 10 \mid : 5$

$x > 2.$

Množimo li ili dijelimo nejednadžbu s negativnim brojem, dobivamo nejednadžbu protivnog smisla,

Ako je $a > b$ i $c < 0$; tada je $ac < bc$ i $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Ako je $a < b$ i $c < 0$; tada je $ac > bc$ i $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Npr.:

$8 > 4 \,/\cdot(-2)$	$8 > 4 \,/:(-2)$
$-16 < -8$	$-4 < -2$
$-8 < -4 \,/\cdot(-2)$	$-8 < -4 \,/:(-2)$
$16 > 8$	$4 > 2$

7) Ako je $a > b$, tada je $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$,

ako je $a < b$, tada je $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

To znači: uzmemo li recipročnu vrijednost lijeve i desne strane zadane nejednadžbe, dobit ćemo nejednadžbu protivnog smisla.

Npr.:

$$7 > 5, \text{ ali je } \frac{1}{7} < \frac{1}{5}; \quad 3 < 5, \text{ ali je } \frac{1}{3} > \frac{1}{5}$$

$$-4 < -3, \text{ ali je } -\frac{1}{4} > -\frac{1}{3}; \quad -2 > -4, \text{ ali je } -\frac{1}{2} < -\frac{1}{4}$$

8) $|a + b + c| \leqq |a| + |b| + |c|$

To znači: apsolutna vrijednost zbroja nije veća od zbroja apsolutnih vrijednosti pribrojnika.

Znak jednakosti vrijedi samo u tom slučaju kad su pribrojnici istog predznaka.

Npr.:

$$|5 - 7 - 8| < |5| + |-7| + |-8|$$

jer je: $|5 - 7 - 8| = |-10| = 10$, dok je $|5| + |-7| + |-8| = 5 + 7 + 8 = 20$

ali: $|-5 - 7 - 8| = |-5| + |-7| + |-8|$

jer je: $|-5 - 7 - 8| = |-20| = 20$ i $|-5| + |-7| + |-8| = 5 + 7 + 8 = 20$

2. RJEŠAVANJE ODREDBENIH NEJEDNADŽBI

a) Općenito

Riješiti nejednadžbu znači odrediti granice u kojim leže vrijednosti nepoznanica koje zadovoljavaju zadanu nejednadžbu. Iz navedenog slijedi da rješenje nejednadžbe ne daje konačnu određenu vrijednost nepoznanice, već određuje interval u kojem leže tražene vrijednosti dotične nepoznanice, daje dakle više vrijednosti nepoznanice.

Npr.: $2x - 4 < 8$; $2x < 8 + 4$; $2x < 12 \,/ :2$

$$\underline{x < 6.}$$

Rješenje nejednadžbe kazuje da nejednadžbu zadovoljavaju sve vrijednosti x koje su manje od 6, rješenja nejednadžbe leže dakle u intervalu od $-\infty$ do 6 isključivši granice, tj. $-\infty < x < 6$.

Pri rješavanju nejednadžbi postupamo na isti način kao pri rješavanju jednadžbi: pojedine članove nejednadžbe prenosimo iz jedne strane na drugu s protivnim predznakom, obje strane nejednadžbe množimo s istim brojem, pri čemu pazimo da se pri množenju negativnim brojem znak nejednadžbe mijenja u protivni.

b) Nejednadžbe prvog stupnja sa jednom nepoznanicom

Opći oblik:

$$ax + b > 0 \quad \text{ili} \quad ax + b < 0$$

Iz $ax + b > 0$ slijedi $ax > -b$. Taj izraz dijelimo sa a, pri čemu mogu biti dva slučaja:

$$\text{ako je } a > 0 \qquad x > -\frac{b}{a}, \text{ dok je } x < -\frac{b}{a} \text{ za } a < 0.$$

Primjeri:

1.
$$x - \frac{3x+1}{2} - \frac{4x-1}{3} < 0 \mid \cdot 6.$$

$$6x - 9x - 3 - 8x + 2 < 0$$

$$-11x < 1 \,/ :(-11)$$

$$\underline{x > -\frac{1}{11}}$$

2.
$$mx + 5 > 3x + m + 4$$

$$mx - 3x > m - 1$$

$$x(m-3) > m - 1 \,/ :(m-3)$$

Prema svojstvu 6: za $m - 3 > 0$, odnosno $m > 3$; $\underline{x > \frac{m-1}{m-3}}$

za $m - 3 < 0$, odnosno $m < 3$; $\underline{x < \frac{m-1}{m-3}}$

za $m = 3$, $\frac{m-1}{m-3} = \frac{2}{0}$ nema rješenja, jer s nulom ne možemo dijeliti.

3. $$\frac{x}{a+b} + \frac{x}{a-b} > 2a \;/ \cdot (a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$$

a) Za $a^2 - b^2 > 0$

$x(a - b) + x(a + b) > 2a(a^2 - b^2)$

ili: $2ax > 2a(a^2 - b^2) \;/ : 2a$

uz $a > 0$ $\underline{x > a^2 - b^2 \quad \text{ako je } a(a^2 - b^2) > 0}$

b) Za $\underline{a(a^2 - b^2) < 0, \; x < a^2 - b^2}$

c) Za $a = 0$ nema rješenja, jer je $\frac{x}{b} - \frac{x}{b} = 0$

4. $$\frac{x + a - b}{a} + \frac{x + b - a}{b} > 0$$

ili: $$\frac{bx + ab - b^2 + ax + ab - a^2}{ab} > 0$$

ili: $$\frac{x(a+b) + 2ab - (a^2 + b^2)}{ab} > 0 \;/ \cdot ab$$

Uz pretpostavku da je $ab > 0$, dobivamo:

$$x(a + b) + 2ab - (a^2 + b^2) > 0$$

ili: $x(a + b) > -2ab + (a^2 + b^2) \;/ : (a + b)$

uz pretpostavku da je $(a + b) > 0$, dobivamo:

$$\underline{x > \frac{(a-b)^2}{a+b} \quad \text{za} \quad ab(a+b) > 0}$$

$$\underline{x < \frac{(a-b)^2}{a+b} \quad \text{za} \quad ab(a+b) < 0}$$

Za $a + b = 0$ i $a \neq 0$, $b \neq 0$ nejednadžba vrijedi za sve x tj. za $-\infty < x < +\infty$.

5. $$x - \frac{3x+1}{2} - \frac{4x-1}{3} + \frac{11x}{6} > 0 \;/ \cdot 6$$

$6x - 9x - 3 - 8x + 2 + 11x > 0$

$17x - 17x - 1 > 0$

$-1 > 0$ nema smisla, nejednadžba nema rješenja.

Riješi nejednadžbe:

$$mx + 4 > 2x + m^2$$

[$x > m + 2$ za $m > 2$; $x < m + 2$ za $m < 2$; za $m = 2$ nema rješenja]

$$\frac{3}{2}x + 5 < -4x + \frac{7}{8}$$

$$\left[x < -\frac{3}{4}\right]$$

$$\frac{x}{6} - \frac{1-x}{4} - \frac{x-2}{24} > 0$$

$$\left[x > \frac{4}{9}\right]$$

$$2 - \frac{5(x-2)}{6} > \frac{3-x}{12} - \frac{3x}{4}$$

$$[-\infty < x < +\infty]$$

c) Sustavi nejednadžbi prvog stupnja

Riješiti sustav nejednadžbi znači odrediti vrijednosti nepoznanica koje zadovoljavaju sve zadane nejednadžbe sustava.

Kako se rješavaju ti sustavi pokažimo na primjerima.

Primjeri:

Treba odrediti vrijednosti nepoznanice x koje zadovoljavaju obje nejednadžbe zadanih sustava.

1. $$\begin{array}{l|l} 5x - \dfrac{2}{3} > \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{9} & \cdot 9 \\ 2(x-4) > \dfrac{3x-1}{2} & \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 45x - 6 > 6x + 1 & 4x - 16 > 3x - 1 \\ 39x > 7 & x > 15 \\ x > \dfrac{7}{39} & \end{array}$$

Obje nejednadžbe sustava zadovoljavaju vrijednosti $\underline{x > 15}$

2. $\dfrac{4x+3}{3x-5} > -\dfrac{2}{3}$ ne smijemo množiti nejednadžbu sa $3(3x-5)$, da se riješimo nazivnika, jer ne znamo predznake $(3x-5)$.

$$\frac{4x+3}{3x-5} + \frac{2}{3} > 0$$

ili $$\frac{12x + 9 + 6x - 10}{3(3x-5)} > 0$$ ili $$\frac{18x-1}{3(3x-5)} > 0$$

Razlomak je pozitivan 1. Kad su pozitivni brojnik i nazivnik, tj. kad je

$$\left.\begin{array}{l} 18x - 1 > 0, \quad \text{pa je} \quad x > \frac{1}{18} \\ \text{i} \\ 3x - 5 > 0, \quad \text{pa je} \quad x > \frac{5}{3} \end{array}\right\} \text{Slijedi } x > \frac{5}{3}$$

2. Kad su brojnik i nazivnik negativni, tj. kad je

$$\left.\begin{array}{l} 18x - 1 < 0, \quad \text{pa je} \quad x < \frac{1}{18} \\ 3x - 5 < 0, \quad \text{pa je} \quad x < \frac{5}{3} \end{array}\right\} x < \frac{1}{18}$$

3. $$\frac{-2x+3}{4-5x} < -\frac{1}{3}$$

Odatle: $$\frac{-2x+3}{4-5x} + \frac{1}{3} < 0 \quad \text{ili:} \quad \frac{-11x+13}{3(4-5x)} < 0$$

Razlomak je negativan:

1) kad je brojnik pozitivan, a nazivnik negativan:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tj. kad je} \quad -11x + 13 > 0, \quad \text{pa je} \quad 11x - 13 < 0 \quad \text{ili} \quad x < \frac{13}{11} \\ \text{i:} \quad 4 - 5x < 0 \quad \text{ili} \quad -\frac{4}{5} + x > 0 \quad \text{pa je} \quad x > \frac{4}{5} \end{array}\right\} \frac{4}{5} < x < \frac{13}{11}$$

2) kad je brojnik negativan, a nazivnik pozitivan:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tj. kad je} \quad -11x + 13 < 0 \quad \text{ili} \quad x - \frac{13}{11} > 0, \quad \text{pa je} \quad x > \frac{13}{11} \\ \text{i:} \quad 4 - 5x > 0 \quad \text{ili} \quad -\frac{4}{5} + x < 0, \quad \text{pa je} \quad x < \frac{4}{5} \end{array}\right\} \text{slijedi} \quad \frac{4}{5} > x > \frac{13}{11}$$

Posljednja dva rezultata su nespojiva, pa sustav nema rješenja.

Riješi zadane sustave nejednadžbi:

1. $$3x + \frac{5}{21} < 2x + 1$$

$$4x + \frac{3}{2} > 2x - 7$$

$$\left[-\frac{17}{4} < x < \frac{16}{21}\right]$$

2. $$\frac{x-1}{x-2} > -\frac{3}{5}$$

$$\left[x > 2\,;\ x < \frac{11}{8}\right]$$

d) Nejednadžbe drugog stupnja

Opći oblik:

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad \text{odnosno } ax^2 + bx + c > 0.$$

Podijelivši nejednadžbu sa a, uz promjenu znaka nejednakosti na protivni, ako je a negativan, dobivamo nejednadžbe u obliku

$$x^2 + px + q < 0, \quad \text{odnosno } x^2 + px + q > 0$$

[vidi formulu (51)].

Prva dva člana tih nejednadžbi nadopunimo na potpun kvadrat i to tako da pribrojimo i oduzmemo kvadrat polovine koeficijenta od x.

Dobivamo:

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q < 0 \quad \text{odn. } x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q > 0$$

$$\text{ili:} \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad \text{odn. } \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 > \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Uvedimo oznaku: $\quad x + \dfrac{p}{2} = z \quad$ i $\quad \left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q = m$

pa je: $\quad z^2 < m$, odnosno $z^2 > m$

a odatle slijedi:

$$-m < x + \frac{p}{2} < +m \quad \text{odn: } x + \frac{p}{2} > m \quad \text{i} \quad x + \frac{p}{2} < -m$$

Primjeri:

1. $7x^2 - 13x - 2 < 0 \; / :7$

$$x^2 - \frac{13}{7}x - \frac{2}{7} < 0$$

$$\left(x - \frac{13}{14}\right)^2 - \frac{169}{196} - \frac{2}{7} < 0$$

$$\left(x - \frac{13}{14}\right)^2 < \frac{225}{196}$$

Označimo: $\quad x - \dfrac{13}{14} = z; \quad \dfrac{225}{196} = m, \quad$ pa je $\sqrt{m} = \pm \dfrac{15}{14}$.

$$z^2 < m$$

$$\begin{array}{rcl} -\dfrac{15}{14} < & x - \dfrac{13}{14} & < +\dfrac{15}{14} \\ +\dfrac{13}{14} & +\dfrac{13}{14} & +\dfrac{13}{14} \\ \hline -\dfrac{1}{7} < & x & < 2 \\ \hline \end{array}$$

$7x^2 - 13x - 2 < 0$ za vrijednosti x iz intervala od $-\frac{1}{7}$ do $+2$, isključivši granice

2. $$7x^2 - 13x - 2 > 0 \;/ : 7$$

$$x^2 - \frac{13}{7}x - \frac{2}{7} > 0$$

$$\left(x - \frac{13}{14}\right)^2 > \frac{225}{196} \;;\quad x - \frac{13}{14} = z; \quad m = \frac{225}{196} \;;\quad \sqrt{m} = \pm\sqrt{\frac{225}{196}} = \pm\frac{15}{14}$$

$$x - \frac{13}{14} > \frac{15}{14} \;\Big|\cdot 14, \text{ pa je } 14x > 28$$

$$\underline{x > 2}$$

$$x - \frac{13}{14} < -\frac{15}{14} \;\Big|\cdot 14, \text{ pa je } 14x < -2$$

$$\underline{x < -\frac{1}{7}}$$

$7x^2 - 13x - 2 > 0$ za sve $x < -\frac{1}{7}$ i za sve $x > 2$.

3. $$-2x^2 - 2x + 144 > 0 \;/ : (-2)$$

$$x^2 + x - 72 < 0 \;;\quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 72 < 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{289}{4} \;;\quad x + \frac{1}{2} = z \;;\quad m = \frac{289}{4} \;;\quad \sqrt{m} = \pm\frac{17}{2}$$

$$-\frac{17}{2} < x + \frac{1}{2} < +\frac{17}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{2}$$

$$\underline{-9 < x < +8}$$

Nejednadžbu zadovoljavaju vrijednosti x koje leže između -9 i $+8$, isključivši granice.

4. $$-2x^2 - 2x + 144 < 0 \;/ : (-2)$$

$$x^2 + x - 72 > 0$$

ili: $$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{289}{4}$$

odatle: $x + \frac{1}{2} > \frac{17}{2}$ pa je $\underline{x > 8}$

i: $x + \frac{1}{2} < -\frac{17}{2}$ pa je $\underline{x < -9}$

$-2x^2 - 2x + 144 < 0$ za sve $x < -9$ i sve $x > 8$.

5. $$3x^2 + 2x + 15 > 0 \,/ :3$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x + 5 > 0$$

ili: $$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + 5 > 0$$

ili: $$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 > -\frac{44}{9}$$

Budući da je kvadrat binoma pozitivan za bilo koju vrijednost x, pa je veći od bilo kojeg negativnog broja, nejednadžba je identična, jer je zadovoljavaju vrijednosti x iz intervala $-\infty < x < +\infty$.

6. $$-3x^2 + 6x - 5 > 0 \,/ : -3$$

$$x^2 - 2x + \frac{5}{3} < 0$$

ili: $$\left(x - 1\right)^2 - 1 + \frac{5}{3} < 0$$

pa je: $$\left(x - 1\right)^2 < -\frac{2}{3}.$$

Nejednadžba nema rješenja, jer pozitivna veličina ne može biti manja od negativne.

§ 13. NIZOVI (SLIJEDOVI)

1. ARITMETIČKI NIZ

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \ldots\ldots, a_1 + (n-1)\,d$$

d — diferencija aritmetičkog niza, a_1 — prvi član niza, n — broj članova niza.

n-ti član niza: $$a_n = a_1 + (n-1)\,d \qquad (54)$$

Primjer: Neka se izračuna 13. član aritm. niza 3, 10, 17, 24. . . . .

Kako je $a_1 = 3$, $d = 10 - 3 = 17 - 10 = \text{itd.} = 7$, a $n = 13$, dobivamo prema (54):

$$a_{13} = 3 + (13-1) \cdot 7 = 3 + 12 \cdot 7 = \underline{87}.$$

Zbroj prvih n članova niza:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \qquad (55)$$

ili ako uvrstimo (54):

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \qquad (55a)$$

Spojimo li članove zadanog niza predznacima +, dobit ćemo **red**.

Primjeri:

1. Neka se izračuna zbroj prvih n prirodnih, tj. cijelih pozitivnih brojeva:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + (n-1) + n.$$

To je aritm. red kojemu je $a_1 = 1$, $a_n = n$ i $n = n$.

Prema (55): $S_n = \frac{n}{2}(1 + n)$; npr. $S_{100} = 50 \cdot 101 = 5050$.

2. Neka se izračuna zbroj prvih n neparnih (lihih) brojeva, tj.

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + [+ (n-1) \cdot 2].$$

Opet je to aritm. red kojemu je $a_1 = 1$, $d = 2$, a $n = n$.

Prema (55a) $S_n = \frac{n}{2}[2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 2] = \frac{n}{2} \cdot 2n = n^2$; npr. $S_{10} = 10^2 = 100$.

3. Koliki je S_9 za 21, 10, — 1, — 12...

$d = 10 - 21 = -11.$

Prema (55a): $S_9 = \frac{9}{2}[2 \cdot 21 + (9-1)(-11)] = \frac{9}{2}[42 - 88] = \underline{-207.}$

2. GEOMETRIJSKI NIZ

a) Konačni geometrijski niz

$$a,\ aq,\ aq^2\ aq^3, \ldots, aq^{n-1}$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} \text{ — kvocijent geometr. niza}$$

n-ti član niza: $\qquad a_n = aq^{n-1} \qquad$ (56)

Zbroj prvih n članova niza:

$$S_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (57)$$

Primjeri:

1. 7, 21, 63, 189, ...

$a = 7,\ q = 21 : 7 = 63 : 21 = \text{itd.} = 3.$

Prema (56) 9. član niza ($n = 9$) : $a_9 = 7 \cdot 3^8 = \underline{45927}.$

Prema (57) zbroj 5 članova niza ($n = 5$): $S_5 = 7\,\frac{3^5 - 1}{3 - 1} = \frac{7 \cdot 242}{2} = \underline{847.}$

2. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \ldots$

$q = -\frac{1}{2} : 1 = -\frac{1}{2}$

5. član niza:

$$a_5 = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \underline{\frac{1}{16}}.$$

Zbroj 6 članova niza:

$$S_6 = 1 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^6 - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{64} - 1}{-\frac{3}{2}} = \frac{63 \cdot 2}{64 \cdot 3} = \underline{\frac{21}{32}}.$$

Spojimo li članove geometrijskog niza predznacima +, dobit ćemo geometrijski r e d. Ako je red konačan, tj. on ima konačan broj članova n, njegova se suma S_n računa prema (57).

b) Beskonačni geometrijski niz

Pretpostavimo da geometrijski niz ima beskonačno mnogo članova, tj. ima oblik:

$$a + aq + aq^2 + \ldots\ldots + aq^{n-1} + aq^n + aq^{n+1} + \ldots$$

Njegovu sumu S za kvocijent reda q, koji je po apsolutnoj vrijednosti manji od 1 ($|q < |1$) (npr. $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$ itd.), tj. leži između -1 i $+1$, lako dobivamo iz (57), ako uzmemo u obzir da q^n teži k nuli ($q^n \to 0$), kad n teži k beskonačnosti ($n \to \infty$), tj. kad n prima vrijednosti koje su veće od svakog ma kako velikog broja. To vrijedi naravno samo uz uvjet da je $|q| < 1$, je za $|q| > 1$ (npr. 2, -3 itd.) $q^n \to \pm\infty$, kad $n \to \infty$. Iz (57) dobivamo dakle kad $n \to \infty$, a $|q| < 1$:

$$S = a\frac{-1}{q-1}$$

ili:

$$S = \frac{a}{1-q} \quad \text{za } |q| < 1. \tag{58}$$

Primjeri:

1. $$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + - \ldots$$

$$a = 1, \quad q = -\frac{1}{3}.$$

Prema (58):

$$S = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4},$$

tj.:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + - \ldots = \underline{\frac{3}{4}}.$$

2. Pretvoriti periodske decimalne razlomke $0,\dot{3}\dot{7}$ i $7,15\dot{4}\dot{3}\dot{8}$ u obične.

a) $0,\dot{3}\dot{7}$ možemo pisati u obliku beskonačnog geometrijskog reda

$$0,\dot{3}\dot{7} = \frac{37}{100} + \frac{37}{10000} + \frac{37}{1000000} + \ldots.$$

kojemu je $$a = \frac{37}{100} \quad \text{i} \quad q = \frac{1}{100}.$$

Prema (58):

$$0,\dot{3}\dot{7} = \frac{37}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{37}{100} \cdot \frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{37}{100} \cdot \frac{100}{99} = \underline{\frac{37}{99}}.$$

b) $7,15\dot{4}\dot{3}\dot{8} = 7 + \frac{15}{10^2} + \frac{438}{10^5} + \frac{438}{10^8} + \frac{438}{10^{11}} + \ldots =$ prema (58)

$$\left(a = \frac{438}{10^5}, \ q = \frac{1}{10^3}\right) = 7 + \frac{15}{10^2} + \frac{438}{10^5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^3}} = 7 + \frac{15}{10^2} +$$

$$+ \frac{438}{10^5} \cdot \frac{10^3}{10^3 - 1} = 7 + \frac{15}{10^2} + \frac{438}{10^2(10^3 - 1)} = 7 + \frac{15 \cdot 10^3 - 15 + 438}{10^2(10^3 - 1)} =$$

$$= 7 + \frac{15000 + 438 - 15}{10^2 \cdot 999} = 7 + \frac{15438 - 15}{99900} = \underline{7\frac{15423}{99900}}.$$

§ 14. PRIBLIŽNO RAČUNANJE

1. LOGARITMIRANJE

Znamo da je $a^m \cdot a^r = a^{m+r}$ vidi (12)

$a^m : a^r = a^{m-r}$ vidi (13)

$(a^m)^r = a^{m \cdot r}$ vidi (15a)

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ vidi (22),

tj. množenje potencija s istim osnovkama svodi se na zbrajanje, dijeljenje — na oduzimanje, potenciranje — na množenje, a korjenovanje — na dijeljenje eksponenata, tj. pri računanju s potencijama vrši se prijelaz na niži stupanj računske operacije.

Odavno se nametnulo pitanje ne bi li se dala navedena svojstva potencija iskoristiti za pojednostavnjenje i ubrzanje računskih operacija s brojevima. Zadaća je bila riješena čim je uspjelo prikazati brojeve kao potencije jedne te iste osnovke.

Prikažemo li npr. niz brojeva kao potencije osnovke 2:

$2^0 = 1$	$2^7 = 128$
$2^1 = 2$	$2^8 = 256$
$2^2 = 4$	$2^9 = 512$
$2^3 = 8$	$2^{10} = 1024$
$2^4 = 16$	$2^{11} = 2048$
$2^5 = 32$	$2^{12} = 4096$
$2^6 = 64$	itd.,

možemo kod računanja svesti množenje na zbrajanje, dijeljenje na oduzimanje itd.

Npr.:

$16 \cdot 256 =$ prema tablici	$= 2^4 \cdot 2^8 = 2^{12}$	= prema tablici	4096
$1024 : 64 =$ „ „	$= 2^{10} : 2^6 = 2^4$	= prema tablici	16
$16^3 =$ „ „	$= (2^4)^3 = 2^{12}$	= prema tablici	4096
$\sqrt[5]{1024} =$ „ „	$= \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2$	= prema tablici	4.

Navedenu tablicu potencija za osnovku 2 možemo prikazati u jednostavnijem obliku:

Broj, tj. vrijednost potencije	Eksponent za osnovku 2, tj. logaritam
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128 itd.	7 itd.

Takva se tablica zove tablica logaritama za osnovku 2, jer eksponenti nose u tom slučaju ime logaritma.

Prema tome, l o g a r i t a m j e e k s p o n e n t s k o j i m t r e b a p o t e n c i r a t i o s n o v k u d a s e d o b i j e z a d a n i b r o j.

Npr.:

$$\log_3 81 = 4, \text{ jer je } 3^4 = 81$$

$$\log_5 \frac{1}{125} = -3, \text{ jer je } 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}.$$

Pojam logaritma može se shvatiti i drukčije. Neka je zadana potencija $b^m = c$. Računamo li odatle osnovku b, dobivamo: $b = \sqrt[m]{c}$. Znamo već da je vađenje korijena prva inverzna operacija potenciranja; računamo li eksponent m, pišemo $m = \log_b c$, a to znači da je m logaritam od c po osnovki b. Logaritmiranje je dakle druga inverzna operacija potenciranja.

Iz pojma logaritma jasno slijedi:

1. da svaki pozitivni broj, $b \neq 1$, možemo izabrati za osnovku, pa sve brojeve prikazati u obliku potencija za tu osnovku, drugim riječima: svaki broj b može biti osnovka logaritamskog sustava, u kojemu je logaritam osnovke jednak 1, tj. $\log_b b = 1$, jer je $b^1 = b$;

2. da negativne brojeve ne možemo logaritmirati, jer potencirajući pozitivnu osnovku dobivamo uvijek pozitivan broj.

Praktički se upotrebljavaju za računanje dekadski logaritmi, koji se također zovu obični ili Briggsovi, tj. logaritmi s osnovkom 10, i to s razloga koji će se vidjeti kasnije. U tablicama dekadskih logaritama navedeni su dakle logaritmi, tj. eksponenti kojima treba potencirati osnovku 10 da se dobiju brojevi od 1 do npr. 10000.

Otvorimo li logaritamske tablice, npr. prvu stranicu tablice I logaritamskih tablica dr J. Majcena, naći ćemo u stupcu označenom sa N (Numerus = broj) niz brojeva, a među njima npr. 2, a kraj njega u stupcu označenom sa L (Logaritam) 0,30103. To znači da je $\log_{10} 2 = 0{,}30103$ ili da je $10^{0{,}30103} = 2$. Malo dalje čitamo da je $\log_{10} 20 = 1{,}30103$ ili da je $10^{1{,}30103} = 20$. U stupcima pod L navedeni su dakle logaritmi, tj, eksponenti za osnovku 10, a u stupcima pod N vrijednosti potencija osnovke 10. Tako npr. vidimo da je $10^{1{,}95424} = 90$. Na slijedećim stranicama navedene su samo decimalne znamenke logaritama, tj. njihove mantise, dok cijeli dijelovi ili tzv. karakteristike moramo napisati sami (npr. u $\log 20 = 1{,}30103$ karakteristika je 1, a mantisa 0,30103) prema slijedećim pravilima:

$$
\begin{array}{llll}
\text{Iz} & \log 1 = 0, & \text{jer je} & 10^0 = 1 \\
& \log 10 = 1, & ,,\ ,, & 10^1 = 10 \\
& \log 100 = 2, & ,,\ ,, & 10^2 = 100 \\
& \log 1000 = 3, & ,,\ ,, & 10^3 = 1000 \\
& \quad \text{itd.} & &
\end{array}
$$

slijedi, da karakteristika logaritma cijelog broja ili nepravog decimalnog razlomka sadrži toliko pozitivnih jedinica, koliko ima znamenaka u cijelom dijelu broja, manje jedan. Npr. log 25,63 ima karakteristiku $2-1=1$, jer broj leži između 10 i 100, a iz gornje tablice vidimo da njegov logaritam mora imati vrijednost između 1 i 2, tj. $\log 25{,}63 = 1 +$ mantisa, koja se vadi iz tablice I: Briggsovi logaritmi.

$$
\begin{array}{llll}
\text{Iz} & \log 1 = 0, & \text{jer je} & 10^0 = 1 \\
& \log 0{,}1 = -1, & ,,\ ,, & 10^{-1} = 0{,}1 \\
& \log 0{,}01 = -2, & ,,\ ,, & 10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01 \\
& \log 0{,}001 = -3, & ,,\ ,, & 10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1000} = 0{,}001 \\
& & & \text{itd.}
\end{array}
$$

slijedi da karakteristika logaritma pravog decimalnog razlomka sadrži toliko negativnih jedinica, koliko ima nula oko decimalne tačke razlomka, računajući i nulu ispred nje. Mantisa je pri tome uvijek pozitivna.

Npr. log 0,03158 ima karakteristiku — 2 i pozitivnu mantisu, jer je broj 0,03158 između 0,1 i 0,01 pa vrijednost njegovog logaritma mora prema gornjoj tablici ležati između — 1 i —2, tj. log. 0,03158 = — 1 — mantisa, a oduzmemo li i dodamo li desnoj strani te jednakosti jedinicu, dobivamo log 0,03158 = (— 1 — 1) + (1 — mantisa) = — 2 + mantisa.

Primjeri:

log 25,63 = 1,40875	log 0,02563 = 0,40875—2
log 2,563 = 0,40875	log 730000 = 5,86332
log 0,2563 = 0,40875—1	log 562,4 = 2,75005*

Znak * ispred treće znamenke mantise znači da prve dvije znamenke mantise treba uzeti ispod retka u kojem leže posljednje tri znamenke mantise.

Ima li broj koji se logaritmira više od četiri znamenke (nule na početku i kraju broja se ne broje) mora se interpolirati, tj. iz logaritama navedenih u tablici odrediti traženi logaritam. Interpolacija se vrši po trojnom pravilu. Pokažimo je na primjeru.

Traži se log 1224,58.

Iz tablice vadimo:

log 1224 = 3,08778 i računamo razliku toga logaritma i slijedećeg, tj. log 1225 = 3,08814. Ta tzv. tablična razlika iznosi u našem slučaju 36 jedinica petog decimalnog mjesta.

Sada diskutiramo: Povećamo li broj za 1, povećat će se njegov logaritam za 36 jedinica petog mjesta; za koliko će se povećati njegov logaritam, ako broj povećamo za 0,58? Postupamo dakle po trojnom pravilu (vidi § 8):

$$1 \; . \; . \; . \; . \; . \; 36$$

$$0{,}58 \; . \; . \; . \; x$$

$$\frac{1}{0{,}58} = \frac{36}{x}, \text{ odatle}$$

$x = 36 \cdot 0{,}58 = 20{,}88 \doteq 21$ jedinica petog mjesta.

Taj rezultat interpolacije pribrojimo log 1224:

$$\begin{array}{rr} \log\ 1224{,}58 = & 3{,}08778 \\ & +\ 21 \\ \hline & \underline{3{,}08799.} \end{array}$$

Rezultati množenja tablične razlike s petom ili petom i šestom znamenkom numerusa navedeni su u malim tablicama P. P. (partes proporcionales), koje su gore označene tabličnim razlikama.

Izračunajmo naš logaritam pomoću P. P.:

Kako je tablična razlika našeg logaritma 36, vadimo tražene umnoške iz one tablice P. P., koja je gore označena sa 36. Za 5 dobivamo 18,0 a za 6 čitamo : 28,8, ali pribrajamo izvađenom logaritmu samo 2,88, tj. deset puta manje, jer je brojka 6 na šestom mjestu zadanog numerusa. Pri zbrajanju logaritma i vrijednosti tih umnožaka nikada ne zbrajamo njihova decimalna mjesta, već pribrajamo samo korekciju (u našem primjeru 1), jer kada radimo s logaritamskim tablicama od 5 decimala, nema smisla računati 6, 7. itd. decimalu mantise, jer nije sigurna.

Računamo dakle ovako:

$$\begin{array}{r} 1 \\ \log 1224{,}58 = 3{,}08778 \\ 18{,}0 \\ \underline{2{,}88} \\ \underline{3{,}08799.} \end{array}$$

Svaka računska operacija izvršena logaritamskim putem završava se antilogaritmiranjem, tj. vađenjem numerusa prema dobivenom logaritmu, pri čemu se opet interpolira. Navedimo primjer:

$$\log a = 0{,}18175; \qquad a = ?$$

Najbliža mantisa u tablicama je 0,18156, kojoj odgovara numerus 1,519, a tablična razlika je 28. Računamo razliku između naše i te najbliže mantise, koja u našem slučaju iznosi 19 jedinica petog mjesta, pa diskutiramo: povećamo li mantisu za 28, numerus će se povećati za 1; za koliko će se povećati numerus, ako mantisu povećamo za 19:

$$\begin{array}{l} 28 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 1 \\ 19 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; x \\ \dfrac{28}{19} = \dfrac{1}{x}, \text{ odatle} \\ x = \dfrac{19}{28} = 0{,}68. \end{array}$$

Te dvije znamenke pripišimo zdesna numerusu 1,519 uzetom iz tablica. Dobijemo traženi numerus: $a = 1{,}51968$.

Jasno je da i sada možemo interpolaciju ubrzati i olakšati upotrebom tablica P. P.

Naš primjer:

Od zadanog logaritma 0,18175 oduzimamo najbližu manju mantisu 0,18156, kojoj odgovara numerus 1,519. Dobijemo 19. Kako je tablična razlika 28, tražimo u desnom stupcu one tablice P. P., koja je gore označena sa 28, najbliži manji broj. To je 16,8 kojemu u lijevom stupcu odgovara 6. Tu brojku pripisujemo zdesna izvađenom numerusu. Dobijemo 1,5196. Sada oduzimamo 16,8 od prve razlike 19. Dobijemo 2,2, a kako tražimo šestu znamenku numerusa, povećavamo 2,2 deset puta i tražimo za 22 u desnom stupcu iste tablice P. P. najbliži manji ili veći broj. To je 22,4, kojemu u lijevom stupcu odgovara 8. Tu brojku opet pripisujemo numerusu sa desnog kraja i dobijemo 1,51968. Daljnje znamenke numerusa nema smisla računati, jer već šesta znamenka nije sigurna.

Računamo dakle ovako:

$$\begin{array}{r} \log a = 0{,}18175 \\ -\,56 \\ \hline 19 \\ -\,16{,}8 \\ \hline 22 \\ -\,22{,}4 \end{array} \qquad \underline{a = 1{,}51968.}$$

Kako su logaritmi brojeva eksponenti iste osnovke, pravila za računanje s potencijama iste osnovke vrijede za računanje s logaritmima, tj.

1) logaritam umnoška jednak je zbroju logaritama množitelja:

$$\log (a \cdot b \cdot c) = \log a + \log b + \log c$$

2) logaritam razlomka jednak je razlici logaritma brojnika i logaritma nazivnika:

$$\log \left[\frac{a}{b}\right] = \log a - \log b$$

3) logaritam potencije jednak je umnošku eksponenta i logaritma osnovke:

$$\log (a^m) = m \cdot \log a$$

4) logaritam korijena jednak je logaritmu radikanda podijeljenom s eksponentom korijena:

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n} = \frac{1}{n} \log a.$$

Sada možemo pokazati zašto dekadski logaritmi imaju prednost prema svima ostalim logaritamskim sustavima. Ta prednost se sastoji u tome da se mantisa dekadskog logaritma ne mijenja ako se u numerusu mijenja položaj decimalne tačke.

Pokažimo to na primjeru:

$\log\ 2 = 0{,}30103$

$\log\ 20 = \log (10 \cdot 2) = \log 10 + \log 2 = 1 + 0{,}30103 = 1{,}30103$

$\log\ 200 = \log (100 \cdot 2) = \log 100 + \log 2 = 2 + 0{,}30103 = 2{,}30103$

$\log\ 0{,}02 = \log \frac{2}{100} = \log 2 - \log 100 = 0{,}30103 - 2.$

Druga prednost dekadskih logaritama već je navedena, a sastoji se u mogućnosti određivanja karakteristike prema broju znamenaka, odnosno nula, tako da tablice dekadskih logaritama brojeva sadrže samo mantise.

O p e r a c i j e s l o g a r i t m i m a vrše se običnim putem, ali treba držati na umu:

a) da se s negativnim logaritmima postupa kao s binomima i da mantisa tokom računanja mora ostati pozitivna.

Primjer:

$$x = \frac{0{,}035108}{0{,}85672} = \frac{a}{b}$$

$$\log x = \log a - \log b$$

	N.	L.	
		$+1 \quad -1$	
a	0,035108	$0{,}54541 - 2$	I
b	0,85672	$-0{,}93284 \mp 1$	II
x	0,040980	$0{,}61257 - 2$	I – II

31	83
9,6	1
41	84

b) da karakteristika mora ostati i nakon dijeljenja cijela. U tu svrhu dodajemo negativnoj karakteristici toliko negativnih jedinica da je možemo podijeliti bez ostatka, isti broj pozitivnih jedinica pribrajamo mantisi, da se vrijednost logaritma ne promijeni.

Primjer:

$$x = \sqrt[7]{0{,}0112308} = \sqrt[7]{a}$$

$$\log x = \frac{1}{7} \log a$$

	N.	L.	
		$+5 \quad -5$	
a	0,0112308	$0{,}05041 - 2$	I
x	0,526612	$0{,}72149 - 1$	I : 7

38	49
3,12	—48
41	1
	—0,8
	2

Imamo li redom oduzeti nekoliko logaritama, možemo pribrojiti njihove k o l o g a r i t m e.

K o l o g a r i t m o m n e k o g b r o j a n a z i v a m o l o g a r i t a m n j e g o v e r e c i p r o č n e v r i j e d n o s t i:

$$\operatorname{colog} a = \log \frac{1}{a} = \log 1 - \log a = 0 - \log a = -\log a.$$

Kologaritam se dobije tako da se karakteristici logaritma dodaje jedna pozitivna jedinica, pa se karakteristika povećana na taj način napiše s protivnim predznakom, a mjesto mantise piše se njena dopuna do 1.

Npr.:

$$\log 35{,}86 = 1{,}55461, \text{ a } \operatorname{colog} 35{,}86 = 0{,}44539 - 2$$

$$\log 0{,}00194 = 0{,}28780 - 3, \text{ a } \operatorname{colog} 0{,}00194 = 2{,}71220.$$

Pišemo li negativne logaritme i kologaritme u takvom obliku da je na kraju — 10 (taj način prikazivanja negativnih logaritama nalazimo obično u tablici logaritama goniometrijskih funkcija), tada je kologaritam dopuna do 10 dotičnog logaritma, pri čemu kologaritam ima na kraju — 10, ako je logaritam pozitivan.

Npr.:

$$\log 35{,}86 = 1{,}55461, \text{ a } \operatorname{colog} 35{,}86 = 8{,}44539 - 10$$

$$\log 0{,}00194 = 7{,}28780 - 10, \text{ a } \operatorname{colog} 0{,}00194 = 2{,}71220.$$

(Dopuna do 1 i do 10 piše se uvijek slijeva nadesno i to tako da se za svaku znamenku piše njena dopuna do 9, a za posljednju do 10.)

Primjer:

$$x = \frac{0{,}0701}{41{,}583 \cdot 0{,}00021856} = \frac{a}{b \cdot c}$$

$$\log x = \log a - \log b - \log c = \log a + \operatorname{colog} b + \operatorname{colog} c$$

	N.	L. i Col.	
a	0,0701	0,84572—2	I
b	41,583	0,38109—2	II
c	0,00021856	3,66043	III
x	7,71333	4,88724 —4	I+II+III
	————	0,88724	

88
3,3
91

45
12
57

24
—22
2
— 1,8
2
— 1,8

Logaritmi su uz rijetke iznimke (log 100 = 2, log 0,1 = — 1 itd.) iracionalni brojevi, tj. decimalni neperiodski razlomci, koji imaju beskonačno mnogo decimala. Stoga je logaritamski račun približan i njegova je tačnost to veća, što su tačnije izračunati logaritmi. Prema broju znamenaka u brojevima i tačnosti koja se traži od rezultata računske operacije, uzimaju se pri logaritamskom računanju ili logaritamske tablice od 5 decimala (npr. Majcenove) ili od 6 decimala (npr. Doležalove) ili od 7 decimala (Vega) itd. Logaritamsko računalo zapravo je logaritamska tablica od 3 decimale.*) Logaritmiranje trigonometrijskih funkcija vidi dalje u III, § 11 i 12.

*) Vidi od istog pisca: Logaritamsko računalo

2. SKRAĆENO MNOŽENJE

Treba izračunati umnožak decimalnih razlomaka a i b na n decimala tačno.

Ispod prvog množitelja a pišemo z d e s n a n a l i j e v o drugi množitelj b, tako da njegove j e d i n i c e dođu ispod $(n + 1)$-ve decimale prvog množitelja a. Nakon toga množimo počevši od k r a j n j e d e s n e brojke množitelja b. Pri množenju uzimamo korekcije (vidi primjer 1). Traženi umnožak ima $(n + 1)$ decimala, ali zajamčenih samo n.

Primjer 1.

$e \cdot \pi$ na tri decimale tačno.

$n = 3; \quad n + 1 = 4 \qquad e = 2{,}718281828\ldots$

$\pi = 3{,}1415926\ \ldots$

2,71828
95,1413

81548 → [3·8 = 24, korekcija 2 ; 3·2 = 6 i korekcija 2 daju zadnju brojku 8]
2718 → [1·2 = 2, korekcija 0 ; 1·8 = 8 i korekcija 0 daje zadnju brojku 8] itd.
1087
27
14
2 → [9·2 = 18, korekcija 1 ; 9·0 = 0 i korekcija 2 daje 2].

8,5396

$e \cdot \pi = 8{,}540$ na tri decimale tačno.

Smisao korekcija koje se uzimaju pri množenju i ušteda rada primjenom načina skraćenog množenja najbolje se vidi ako se množenje izvrši običnim putem:

2,71828 · 3,14159	
815484	
27182	8
10873	12
271	828
135	9140
24	46452
8,53972	12652

Primjer 2.

0,057553543 · 0,00511 na 6 decimala tačno.

$n = 6; \ n + 1 = 7.$

0,0575535
115000

2878
58
6

0,0002942

0,057553543 · 0,00511 = 0,000294 na 6 dec. tačno.

Primjer 3.:

0,05621343 · 125,63123 na 4 decimale tačno.

$n = 4; \quad n + 1 = 5.$

```
 0,05621343
 3,2136521
 ---------
 562134
 112427
  28107
   3373
    169
      6
      1
 ---------
 7,06217
```

0,05621343 · 125,63123 = 7,0622 na 4 dec. tačno.

3. SKRAĆENO DIJELJENJE

Treba izračunati kvocijent decimalnih razlomaka a i b na n decimala tačno.

Najprije se odredi položaj decimalnog zareza u traženom kvocijentu i broj znamenaka m koje treba izračunati da se dobije kvocijent na n decimala tačno (m = broj tačaka, vidi primjere). Nakon toga se uzme:

1. u divizoru b $(m + 1)$ znamenaka, a $(m + 2)$-ga prepiše radi korekcije pri množenju.

2. u dividendu a toliko znamenaka da bude veći od divizora, korigirajući posljednju pridržanu znamenku dividenda.

Sada se dijeli, pri čemu se nakon svakog oduzimanja briše posljednja znamenka divizora tako, da se dalje dijeli ostatak s preostalim znamenkama divizora. Pri množenju uzimaju se korekcije.

Određeni kvocijent ima $(n + 1)$ decimala, ali zajamčenih samo n.

Primjer 1.

$\pi : e = 3{,}1415926\ldots : 2{,}718218\ldots$ na 3 dec. tačno.

$$n = 3; \quad m = 4; \quad m + 1 = 5.$$

$$31416 \cdot 2\cancel{7}\cancel{1}\cancel{8}\cancel{2}_3 = 1{,}155\underline{7}$$

```
31416        ·,···
 4233
 1515
  156
   20
    1
```

$\pi : e = 1{,}156$ na 3 dec. tačno.

Primjer 2.

$853{,}97 : \pi$ na tri decimale tačno.

$$n = 3; \quad m = 6; \quad m + 1 = 7.$$

$8539700 : 3\cancel{1}\cancel{4}\cancel{1}\cancel{5}\cancel{9}\cancel{2}_6 = \dot{2}\dot{7}\dot{1},\dot{8}\dot{2}\dot{7}\underline{2}$
2256515
57401
25985
853
225
5
—1

<u>$853{,}97 : \pi = 271{,}827$ na 3 dec. tačno.</u>

Primjer 3.

$\frac{1}{e}$ na 4 decimale tačno.

$$n = 4;\ m = 4;\ m + 1 = 5.$$

$100000 : 2\cancel{7}\cancel{1}\cancel{8}\cancel{2}_8 = 0,\dot{3}\dot{6}\dot{7}\dot{8}\underline{8}$
18452
2143
240
23
1

$\frac{1}{e} = 0{,}3679$ na 4 decimale tačno.

Primjer 4.

$0{,}00788918 : 2{,}11221$ na 4 decimale tačno.

$$n = 4;\quad m = 2;\quad m + 1 = 3$$

$789 : 21\cancel{1}_2 = 0{,}00\dot{3}\dot{7}\underline{3}$
155
7
1

<u>$0{,}00788918 : 2{,}11221 = 0{,}0037$ na 4 dec. tačno.</u>

§ 15. KAMATNO — KAMATNI RAČUN

1. SLOŽENE KAMATE

Uložimo li u banku npr. 100 din. uz 4%, imat ćemo na kraju godine 4 din. kamata. Ako tih 4 din. ne podignemo krajem godine, banka će na kraju slijedeće godine računati kamate od 104 din, tj. dat će nam osim kamata od glavnice još i kamate od kamata. Ako se, dakle, kamate ne podižu, već priklapaju glavnici, pa se daljnje kamate računaju ne samo od glavnice već i od naraslih kamata, kaže se da je *glavnica uložena uz složene kamate*.

2. SADAŠNJA I KONAČNA VRIJEDNOST GLAVNICE ULOŽENE UZ SLOŽENE KAMATE

Riješimo zadatak: Na koju će svotu narasti glavnica g din, uložena uz p% složenih kamata?

Na kraju 1. godine imat ćemo (vidi § 9): $g + \frac{g}{100}p =$

$$= g\left(1 + \frac{p}{100}\right) = g \cdot q,$$

gdje je $q = 1 + \frac{p}{100}$ — *kamatni faktor*. (59)

Na kraju 2. godine bit će: $gq + \frac{gq}{100} \cdot p = gq\left(1 + \frac{p}{100}\right) =$

$$= \text{prema (59)} = gq \cdot q = gq^2.$$

Na kraju 3. godine: $gq^2 + \frac{g \cdot q^2}{100} \cdot p = gq^2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = gq^3$ itd.

Konačno na kraju n-te godine imat će uložena glavnica g vrijednost:

$$g_n = gq^n. \tag{60}$$

Tu je

$g =$ uložena glavnica

$q = 1 + \frac{p}{100}$ — kamatni faktor

$n =$ broj godina.

Iz formule (60) možemo dalje izračunati:

1. uloženu glavnicu g ili, kako se kaže, sadašnju vrijednost glavnice, ako znamo konačnu vrijednost glavnice g_n, broj godina n i kamatni faktor q ili kamatnjak p.

$$g = \frac{g_n}{q^n} = g_n \cdot \frac{1}{q^n}, \tag{60a}$$

2. kamatni faktor q ili kamatnjak p [iz (59) imamo $p = 100\,(q - 1)$], ako znamo g_n, g i n, jer iz (60) slijedi:

$$q^n = \frac{g_n}{g},$$

a odatle:

$$q = \sqrt[n]{\frac{g_n}{g}}. \tag{60b}$$

3. broj godina n u toku kojih je glavnica g uložena uz p % složenih kamata narasla do konačne vrijednosti g_n, jer iz (60) slijedi:

$$q^n = \frac{g_n}{g},$$

a logaritmiranje daje: $n \log q = \log g_n - \log g$, a odatle

$$n = \frac{\log g_n - \log g}{\log q}. \tag{60c}$$

Do sada smo pretpostavljali godišnje ukamaćivanje, tj. slučaj kada se kamate priklapaju glavnici jedanput na godinu i to krajem svake godine (dekursivno). Međutim banke vrše obično polugodišnje ukamaćivanje, tj. kamate se računaju i priklapaju glavnici krajem svakog polugodišta, dakle dvaput na godinu. Konačno, kamate se mogu priklapati glavnici i četvrtgodišnje, tj. nakon svaka 3 mjeseca, dakle 4 puta na godinu, ili nakon svaka 4 mjeseca, dakle 3 puta godišnje itd.

Da bi smo mogli i za te slučajeve primijeniti formulu (60), moramo je nešto preinačiti.

Kamatni faktor (59) $q = 1 + \frac{p}{100}$ primit će sada oblik:

$$q_1 = 1 + \frac{p}{m \cdot 100}, \tag{61}$$

gdje je m broj koji pokazuje koliko se puta u toku godine vrši ukamaćivanje uložene glavnice, jer ako je npr. glavnica uložena uz 4%, a kamate se se priklapaju glavnici polugodišnje, kamatnjak za po godine bit će $\frac{p}{m} = \frac{4}{2} = 2\%$, jer se kamate priklapaju glavnici dva puta u godini, a ako se ukamaćivanje vrši svaka 3 mjeseca, kamatnjak za 3 mjeseca $= \frac{1}{4}$ godine iznosi $\frac{p}{m} = \frac{4}{4} = 1\%$, jer se kamate priklapaju glavnici 12 mjes.: 3 mjes. = 4 puta godišnje itd. Označimo li općenito $\frac{p}{m} = p_1$, primit će formula (61) oblik:

$$q_1 = 1 + \frac{p_1}{100}, \tag{61a}$$

gdje je $p_1 = \frac{p}{m}$.

p_1 se zove **relativni kamatnjak**, dok je q_1 **relativni kamatni faktor**.

Uzmemo li dalje u obzir da će u toku n godina broj ukamaćivanja iznositi $m \cdot n$, gdje je m broj ukamaćivanja u jednoj godini, primit će formula (60) oblik

$$g_n = g \cdot q_1^{mn}, \tag{62}$$

gdje je g_n = konačna vrijednost glavnice nakon n godina,
g = sadašnja vrijednost glavnice,
$q_1 = 1 + \frac{p}{m \cdot 100} = 1 + \frac{p_1}{100}$ = relativni kamatni faktor,
m = broj ukamaćivanja u 1 godini,
n = broj godina.

Iz (62) slijedi:

$$g = \frac{g_n}{q_1^{mn}}. \tag{62a}$$

To je sadašnja vrijednost glavnice, koja dospijeva nakon n godina uz $p\%$ i m ukamaćivanja u godini.

Primjeri:

1. Netko uloži u banku din. 10000.—. Na koji će iznos narasti ta glavnica za 10 godina uz kamatnjak 6% godišnje, ako se kamate priklapaju glavnici

a) godišnje,
b) polugodišnje,
c) svaka 4 mjeseca?

Zadano: $g = 10000$; $n = 10$, $p = 6$.

Traži se: g_{10}.

a) Prema (59): $q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{6}{100} = 1{,}06.$

Prema (60): $g_{10} = g \cdot q^n = 10000 \cdot 1{,}06^{10}$.

Dobiveni izraz možemo neposredno logaritmirati, pa tako dobijemo traženu vrijednost za g_{10}. Jednostavnije i brže doći ćemo do te vrijednosti ako imamo pri ruci tablicu u kojoj su izračunate vrijednosti q^n za niz vrijednosti kamatnjaka p i broja godina n. Takva se tablica nalazi npr. u logaritamskim tablicama dr Majcena (tablica XI*). Iz nje vadimo po argumentima $p = 6\%$ i $n = 10 : q^{10} = 1{,}790848$, pa

$$g_{10} = 10000 \cdot 1{,}790848 = \underline{17908{,}48 \text{ din.}}$$

Kad glavnica g ne bi bila okrugao broj, kao u našem slučaju, računali bismo taj umnožak logaritamskim putem.

b) $m = 2,\ m \cdot n = 2 \cdot 10 = 20.$

Prema (61a):

$$p_1 = \frac{p}{m} = \frac{6}{2} = 3\,\% \text{ i}$$

$$q_1 = 1 + \frac{p_1}{100} = 1{,}03.$$

Prema (62):

$$g_{10} = 10000 \cdot 1{,}03^{20}.$$

Vrijednost za $1{,}03^{20}$ vadimo iz tablice XI po argumentima $p_1 = 3\%$ i $n = 20$ pa dobivamo:

$$g_{10} = 10000 \cdot 1{,}806111 = \underline{18061{,}11 \text{ din.}}$$

c) $m = 12 : 4 = 3;\ m \cdot n = 3 \cdot 10 = 30.$

Prema (61a)

$$p_1 = \frac{p}{m} = \frac{6}{3} = 2\% \quad \text{i}$$

$$q_1 = 1 + \frac{p_1}{100} = 1{,}02.$$

Prema (62):

$$g_{10} = 10000 \cdot 1{,}02^{30} = 10000 \cdot 1{,}811362 = \underline{18113{,}62 \text{ din.}}$$

(vrijednost 1,811362 izvađena je iz tabice XI po argumentima $p = 2$ i $n = 30$).

2. Kolika je sadašnja vrijednost duga od 10000 din. koji bi se morao platiti nakon 5 godina uz $4\frac{1}{2}\%$ i

a) godišnje ukamaćivanje,

b) četvrtgodišnje ukamaćivanje?

---

*) U novom izdanju Nakladnog zavoda Hrvatske, Zagreb 1948, ta je tablica izostavljena, a umetnuta je tablica VI, Logaritmi kamatnih faktora. Mnogo su opširnije kamatne tablice koje je dr Vladimir Vranić priložio svojoj knjizi »Osnovi financijske i aktuarske matematike«, Zagreb 1946.

a) $g_n = 10000$, $n = 5$, $p = 4{,}5$

$$q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + 0{,}045 = 1{,}045.$$

Prema (60a):

$$g = \frac{g_n}{q^n} = \frac{10000}{1{,}045^5} = 10000 \cdot \frac{1}{1{,}045^5}.$$

Vrijednost $\frac{1}{q^n} = \frac{1}{1{,}045^5}$ opet možemo uzeti iz tablice. U Majcenovim logaritamskim tablicama to je tablica XII.* Iz nje vadimo po argumentima $p = 4{,}5\%$ i $n = 5$

$$\frac{1}{1{,}045^5} = 0{,}802451.$$

Dobivamo: $g = 10000 \cdot 0{,}802451 = \underline{8024{,}51 \text{ din.}}$

b) $m = 4$; $m \cdot n = 20$.

Prema (61a):

$$p_1 = \frac{p}{m} = \frac{4{,}5}{4} = 1{,}125\%$$

$$q_1 = 1 + \frac{p_1}{100} = 1 + \frac{1{,}125}{100} = 1{,}01125$$

Prema (62a):

$$g = \frac{g_n}{q_1^{mn}} = \frac{10000}{1{,}01125^{20}}.$$

Kako u tablici XII nisu izračunate vrijednosti: $\frac{1}{q^n}$ za $q = 1{,}125\% = 1\frac{1}{8}\%$, traženu vrijednost g dobivamo logaritamskim putem:

$$\log g = \log 10000 - 20 \log 1{,}01125 = \log 10000 + 20 \operatorname{colog} 1{,}01125$$

$$\begin{array}{rcl}
\log 1{,}01125 & = & 0{,}00486 \\
\operatorname{colog} 1{,}01125 & = & 0{,}99514 - 1 \\
\hline
20 \operatorname{colog} 1{,}01125 & = & 19{,}90280 - 20 \\
\log 10000 & = & 4{,}00000 \\
\hline
\log g & = & 23{,}90280 - 20 \\
 & = & 3{,}90280
\end{array}
\left.\right\} +$$

$$\underline{g = 7994{,}67 \text{ din.}}$$

3. PERIODSKE UPLATE

a) Konačna i sadašnja vrijednost periodskih uplata

Riješimo zadatak: Netko ulaže kroz n godina koncem svake godine svotu r uz $p\%$ složenih kamata i godišnje ukamaćivanje. Pita se kolika je konačna vrijednost tih periodskih uplata na kraju n-te godine?

*) U novom izdanju ta tablica je također izostavljena.

Sastavimo križaljku, označivši rednim brojem **p o č e t a k** svake godine i napisavši ispod svake godine uloženu svotu r.

Početak	1. god.	2. god.	3. god.	(n — 1) god.	n god.	(n + 1) god.
	—	r	r	r	r	r

Iz križaljke vidimo da je prva uplata r ležala $(n-1)$ godinu, jer je između kraja 1. godine i kraja n-te godine proteklo $(n-1)$ godina, pa će ta prva uplata narasti prema (60) na $r\,q^{n-1}$. Druga uplata ležala je jednu godinu manje, pa će narasti na $r \cdot q^{n-2}$. Treća — na $r \cdot q^{n-3}$ itd. pretposljednja — na $r \cdot q$, jer je ležala samo jednu godinu, i konačno posljednja uplata r ostala je bez promjene, jer je bila uložena na dan obračuna, tj. na kraju n-te godine [ili na početku $(n+1)$-ve god.].

Prema tome konačna vrijednost svih periodskih uplata na **k r a j u** n-te godine bit će:

$$S_n = rq^{n-1} + rq^{n-2} + rq^{n-3} + \dots\dots + rq + r$$

ili:

$$S_n = r\,(1 + q + q^2 + \dots\dots + q^{n-2} + q^{n-1}).$$

U zagradama je geometrijski red kojemu je prvi član $a = 1$, kvocijent $q = q$, a broj godina $n = n$.

Prema (57) imamo:

$$S_n = r\frac{q^n - 1}{q - 1}, \tag{63}$$

gdje je $q = 1 + \frac{p}{100}$.

To je konačna vrijednost periodskih uplata r na **k r a j u** n-te **g o d i n e** uz ulaganje **k o n c e m** svake godine. Istu formulu (63) dobivamo za konačnu vrijednost periodskih uplata na **p o č e t k u** n-te godine, ako se ulaganje vrši **p o č e t k o m** svake godine (sastavi križaljku).

Ako hoćemo da odredimo konačnu vrijednost periodskih uplata r opet **n a k r a j u** n-te **g o d i n e**, ali uz ulaganje **n a p o č e t k u** svake godine, moramo uzeti u obzir da će sada prva uplata ležati n godina (sastavi križaljku!), druga $(n-1)$ godinu itd., a posljednja jednu godinu. Ponovivši istu diskusiju dobit ćemo:

$$S'_n = rq^n + rq^{n-1} + \dots\dots + rq^2 + rq$$

ili:

$$S'_n = rq\,(1 + q + \dots\dots + q^{n-2} + q^{n-1})$$

i prema (57):

$$S'_n = rq\frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{63a}$$

To je konačna vrijednost periodskih uplata r **n a k r a j u** n-te **g o d i n e** uz ulaganje **p o č e t k o m** godine.

I za vrijednosti $q\frac{q^n-1}{q-1}$ postoje posebne tablice. U tablicama dr Vranića (vidi opasku na str. 84) to je tabl. III.

Riješimo još pitanje, kolika je sadašnja vrijednost periodskih uplata r, koje su narasle na S_n, odnosno na S'_n n a k r a j u n-t e g o d i n e, drugim riječima koju svotu S moramo uložiti na kraju 1. godine, odnosno S' na početku 1. godine, da bismo imali S_n, odnosno S'_n na kraju n-te godine?

Uzevši u obzir da bi svota S, odnosno S' ležala $(n-1)$, odnosno n godina, dobit ćemo prema (60a):

$$S = \frac{S_n}{q^{n-1}} \tag{64}$$

$$S' = \frac{S'_n}{q^n}, \tag{64a}$$

gdje je $q = 1 + \frac{p}{100}$.

To je s a d a š n j a v r i j e d n o s t periodskih uplata na k r a j u n-te godine.

b) Povećanje glavnice periodskim ulaganjem

Ako netko uloži početkom prve godine glavnicu g uz p% složenih kamata i godišnje ukamaćivanje, a dalje p o č e t k o m svake slijedeće godine računajući i početak $(n+1)$-ve godine (kraj n-te), ulaže još svotu r, narast će krajem n-te godine glavnica g prema (60) na $g \cdot q^n$, a periodske uplate r prema (63) — na $r\frac{q^n-1}{q-1}$, pa će konačna vrijednost glavnice i periodskih uplata krajem n-te godine iznositi:

$$S_n = g \cdot q^n + r\frac{q^n-1}{q-1} \tag{64a}$$

gdje je $q = 1 + \frac{p}{100}$,

a ako se svota r oduzima glavnici g, konačna će vrijednost biti:

$$S_n = g \cdot q^n - r\frac{q^n-1}{q-1}. \tag{64a}$$

P r i m j e d b a. Nije moguće predvidjeti i obuhvatiti formulama sve načine pod kojima se ulaže i podiže novac. Stoga se preporučuje da se pri rješavanju složenih zadataka ne služi formulama (63) do (64a), već se za svaki konkretni slučaj načini izvod formule uz pripomoć križaljke, iz koje se jasno vidi koliko je godina ležala pojedina svota do momenta obračuna.

Primjer:

Netko uloži 30000 din. pa početkom idućih 4 godina uvećava svoj ulog svaki put za 2500 din., dok krajem 6, 8 i 10. godine podiže po 1500 din. Kolika je njegova imovina na kraju 12. godine? ($p = 4\%$, godišnje ukamaćivanje.)

$$g = 30000; \quad r = 2500; \quad r_1 = 1500; \qquad q = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}04.$$

Početak	1. god.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
	g	r	r	r	r		$-r_1$		$-r_1$		$-r_1$		

$$S_{12} = g \cdot q^{12} + rq^{11} + rq^{10} + rq^{9} + rq^{8} - r_1q^{6} - r_1q^{4} - r_1q^{2}$$

ili:

$$S_{12} = g \cdot q^{12} + rq^{8} (1 + q + q^2 + q^3) - r_1q^2 (1 + q^2 + q^4).$$

Prema (57):

$$S_{12} = g \cdot q^{12} + rq^8 \frac{q^4 - 1}{q - 1} - r_1q^2 \frac{(q^2)^3 - 1}{q^2 - 1}$$

$$x = g \cdot q^{12} = 30000 \cdot 1{,}04^{12} = 30000 \cdot 1{,}601032 = 48030{,}96 \text{ din.}$$

(Tablica XI)

$$y = rq^8 \frac{q^4 - 1}{q - 1} = 2500 \cdot 1{,}04^8 \cdot \frac{1{,}04^4 - 1}{0{,}04} = 2500 \cdot 1{,}368569 \cdot \frac{0{,}169859}{0{,}04}$$

$$z = r_1q^2 \frac{q^6 - 1}{q^2 - 1} = 1500 \cdot 1{,}081600 \cdot \frac{0{,}265319}{0{,}081600}$$

y i z računat ćemo logaritamskim putem:

$$\left.\begin{array}{ll} \log 2500 & = 3{,}39794 \\ \log 1{,}368569 & = 0{,}13627 \\ \log 0{,}169859 & = 0{,}23009 - 1 \\ \text{colog } 0{,}04 & = 1{,}39794 \end{array}\right\} +$$

$$\log y = 4{,}16224$$
$$y = 14529{,}00$$

$$\left.\begin{array}{ll} \log 1500 & = 3{,}17609 \\ \log 1{,}081600 & = 0{,}03407 \\ \log 0{,}265319 & = 0{,}42377 - 1 \\ \text{colog } 0{,}081600 & = 1{,}08831 \end{array}\right\} +$$

$$\log z = 3{,}72224$$
$$z = 5275{,}25$$

$S_{12} = x + y - z = 57284{,}71.$ $\qquad\qquad$ $\underline{S_{12} = 57284{,}71 \text{ din.}}$

4. OTPLATA DUGA. ANUITETI

Veći dugovi ili zajmovi sklopljeni na duži otplatni rok otplaćuju se obično tako da se u izvjesnim vremenskim razmacima, npr. na koncu svake godine, uplaćuju isti iznosi, koji se zovu a n u i t e t i.

Jednim dijelom anuiteta isplaćuju se kamati, dok drugi dio (takozvana otplatna kvota) ide na amortizaciju (podmirenje) duga.

Zadatak glasi dakle ovako: Zajam od g din. treba otplatiti u n anuiteta (u n godina) koncem svake godine uz kamatnjak $p\%$ godišnje. Koliki je svaki anuitet a?

Za n godina narast će prema (60) dug g na $g \cdot q^n$, gdje je $q = 1 + \frac{p}{100}$, a konačna vrijednost uplaćenih anuiteta na kraju n-te godine prema (63) na $a \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Da bude zajam koncem n-te godine potpuno otplaćen, mora biti:

$$g \cdot q^n = a \frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{65}$$

Iz te formule amortizacije duga dobivamo:

1) vrijednost anuiteta: $$a = g \frac{q^n (q - 1)}{q^n - 1} \tag{65a}$$

2) broj godina n, u toku kojih će se otplatiti dug g uz zadani anuitet a.

Da odredimo n množimo formulu (65) sa $(q - 1)$:

$$g \cdot q^n (q - 1) = aq^n - a,$$

ili:

$$aq^n - gq^n (q - 1) = a,$$

ili:

$$q^n [a - g (q - 1)] = a.$$

Odatle:

$$q^n = \frac{a}{a - g (q - 1)},$$

a logaritmiranje daje

$$n \log q = \log a - \log [a - g (q - 1)]$$

pa je: $$n = \frac{\log a - \log [a - g (q - 1)]}{\log q} \tag{65b}$$

U tablicama dr Vranića (vidi opasku na str. 84) nalazi se posebna tablica V, u kojoj su izračunate vrijednosti izraza $\frac{q^n (q - 1)}{q^n - 1}$.

Za svaki veći dugoročni zajam sastavlja se tzv. otplatna osnova, u kojoj je posebno za svaku godinu navedeno:

1) iznos I isplaćenih kamata,
2) otplatna kvota K i
3) ostatak duga L, gdje je

$$I = \frac{g}{100} \cdot p,$$

odnosno

$$\frac{L}{100} \cdot p, \qquad K = a - I, \qquad L = g - K.$$

Primjer.

Netko želi kupiti kuću u vrijednosti od 300000 din. U tu svrhu posudi taj novac od banke, koja traži 4% kamata i da joj dug namiri u jednakim godišnjim obrocima kroz 12 godina. Kolika je godišnja otplata?

$$g = 300000; \quad p = 4\%; \quad q = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}04\,; n = 12.$$

Uvrštenje u formulu (65a) daje:

$$a = 300000 \cdot \frac{1{,}04^{12} \cdot 0{,}04}{1{,}04^{12} - 1}$$

Iz tablice XI (Majcen) vadimo: $1{,}04^{12} = 1{,}601032$.

Dakle:

$$a = \frac{300000 \cdot 1{,}601032 \cdot 0{,}04}{0{,}601032}$$

$$\begin{array}{ll} \log 0{,}601032 & = 0{,}77890 - 1 \\ \hline \log 300000 & = 5{,}47712 \\ \log 1{,}601032 & = 0{,}20440 \\ \log 0{,}04 & = 0{,}60206 - 2 \\ \operatorname{colog} 0{,}601032 & = 0{,}22110 \\ \hline \log a & = 4{,}50468 \\ & \underline{a = 31965{,}40 \text{ din.}} \end{array} \Bigg\} +$$

5. RENTE

Novčani iznos što ga netko prima uz izvjesne uvjete i u izvjesnim vremenskim razmacima, npr. početkom ili krajem svake godine, zove se r e n t a. Renta se može steći ili uloškom, koji se plati jednom za uvijek (miza), ili periodskim uplatama (premijama).

Da bismo izveli opću jednadžbu rente za prvi slučaj, riješimo zadatak:

Koju svotu S (mizu) moramo uložiti da kroz n godina primamo na kraju svake godine rentu r (p% godišnje)?

Vrijednosti mize S na kraju n-te godine iznosi prema (60) $S \cdot q^n$, gdje je $q = 1 + \frac{p}{100}$. Rente su p e r i o d s k e i s p l a t e, pa možemo lako prema formuli za periodske uplate (63) napisati konačnu vrijednost isplaćenih renta na kraju n-te godine. Ona iznosi:

$$r \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Obje izračunate vrijednosti moraju biti jednake:

$$Sq^n = r \frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{66}$$

T o j e o p ć a j e d n a d ž b a r a č u n a r e n t e.

Iz (66) slijedi:

1) vrijednost rente koja dospijeva kroz n godina na kraju svake godine:

$$r = S\frac{q^n (q-1)}{q^n - 1}, \tag{66a}$$

2) miza ili sadašnja vrijednost rente:

$$S = r\frac{q^n - 1}{q^n (q-1)}, \tag{66b}$$

3) broj godina n u toku kojih se isplaćuje renta r na kraju svake godine:

$$n = \frac{\log r - \log [r - S(q-1)]}{\log q}. \tag{66c}$$

Ako se renta r isplaćuje početkom svake godine, jednadžba (66) prima oblik:

$$Sq^{n-1} = r\frac{q^n - 1}{q - 1}, \tag{67}$$

a odatle je

a) vrijednost rente:

$$r = S\frac{q^{n-1}(q-1)}{q^n - 1},$$

b) miza ili sadašnja vrijednost rente s obzirom na početak n-te godine:

$$S = r\frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)}.$$

U tablicama dr Vranića (vidi opasku na str. 84) nalazi se tablica V za vrijednosti $\frac{q^n (q-1)}{q^n - 1}$ i tablica IV za vrijednosti $\frac{q^n - 1}{q^n (q-1)}$.

Primjeri:

1. Netko je uložio 3000 din, da bi mogao nakon 30 godina dobivati rentu koja će trajati 15 godina, a počet će krajem 31. godine. Kolika je renta ako se računa 5% godišnje?

Prema (66) imamo, uzevši u obzir da je $Sq^n = 3000 \cdot 1{,}05^{45}$, jer se računa konačna vrijednost uložene svote na kraju 30 + 15 = 45. godine, dok je $q = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}05$, dalje je $r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \frac{1{,}05^{15} - 1}{0{,}05}$, jer su se rentne isplate vršile kroz posljednjih 15 godina na kraju svake godine:

$$3000 \cdot 1{,}05^{45} = r \cdot \frac{1{,}05^{15} - 1}{0{,}05}.$$

Odatle dobivamo:

$$r = \frac{3000 \cdot 1{,}05^{45} \cdot 0{,}05}{1{,}078928},$$

gdje je $1{,}078928 = 1{,}05^{15} - 1 = 2{,}078928 - 1$ (Majcen, Tabl. XI).

log 1,078928	= 0,03299
log 1,05	= 0,02119
45 log 1,05	= 0,95355
log 3000	= 3,47712
log 0,05	= 0,69897 — 2
colog 1,078928	= 0,96701 — 1
log r	= 3,09665

r = 1249,26 din.

2. Netko želi da osigura sebi godišnju rentu od 1000 din, koju će podizati kroz 10 godina svršetkom svake godine. Koliku će svotu morati položiti u banku, ako je kamatnjak 4% godišnje?

Prema (66b):

$$S = 1000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04^{10} \cdot 0{,}04}$$

ili:

$$S = \frac{1000 \cdot 0{,}480244}{1{,}480244 \cdot 0{,}04} \text{ (Majcen, tabl. XI)}$$

log 1000	= 3,00000
log 0,480244	= 0,68146 — 1
colog 1,480244	= 0,82967 — 1
colog 0,04	= 1,39794
log S	= 3,90907

S = 8111 din.

3. Otac uloži za svoju kćer na njen rođendan, pa onda nakon 4, 8, 12, 16 i 20 godina svaki put po 800 din. Koliku godišnju rentu može kći uživati kroz 6 godina nakon navršene 24. godine (p = 4% godišnje)?

$$r = 800\,; \quad q = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}04\,; \quad r_1 = ?$$

Poč.	1. god.	2.	3	4.	5. ...	9. ...	13. ...	17. ...	21. ...	24.	25.	26 ...	30.	31
r					r	r	r	r	r		r_1	r_1	r_1	

Konačna vrijednost periodskih uplata r na kraju 30. godine:

$$S'_n = r \cdot q^{30} + rq^{26} + rq^{22} + rq^{18} + rq^{14} + rq^{10} = rq^{10} \left(1 + q^4 + q^8 + q^{12} + q^{16} + q^{20}\right) =$$

$$= \text{prema (57)} =$$

$$= rq^{10} \frac{(q^4)^6 - 1}{q^4 - 1} = rq^{10} \cdot \frac{q^{24} - 1}{q^4 - 1}.$$

Konačna vrijednost rentnih uplata r na kraju 30. godine prema (63a):

$$S''_n = r_1 \cdot q \frac{q^6 - 1}{q - 1}.$$

Kako je $S''_n = S'_n$, imamo

$$r_1 q \frac{q^6 - 1}{q - 1} = rq^{10} \frac{q^{24} - 1}{q^4 - 1}.$$

Odatle:

$$r_1 = \frac{r \cdot q^9 (q^{24} - 1)(q - 1)}{(q^4 - 1)(q^6 - 1)}.$$

Uvrštenje numeričkih vrijednosti uz pripomoć tablice XI (Majcen) daje:

$$r_1 = \frac{800 \cdot 1{,}423312 \cdot 1{,}563304 \cdot 0{,}04}{0{,}169859 \cdot 0{,}265319}.$$

log 0,169859	= 0,23009 — 1
log 0,265319	= 0,42377 — 1
log 800	= 2,90309
log 1,423312	= 0,15330
log 1,563304	= 0,19404
log 0,04	= 0,60206 — 2
colog 0,169859	= 0,76991
colog 0,265319	= 0,57623
log r_1	= 3,19863

r_1 = 1579,89 din.

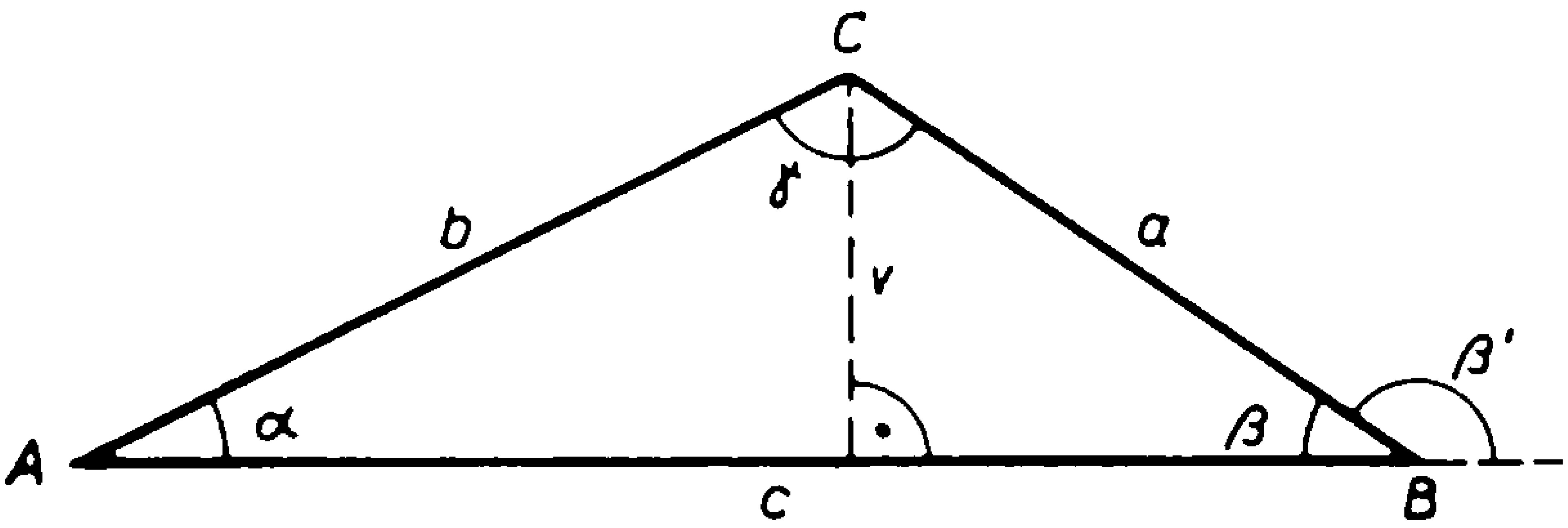
II. GEOMETRIJA

§ 1. PLANIMETRIJA

1. TROKUT

Elementi su mu stranice a, b, c, i kutovi α, β, γ.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



Sl. 1

Vanjski kut

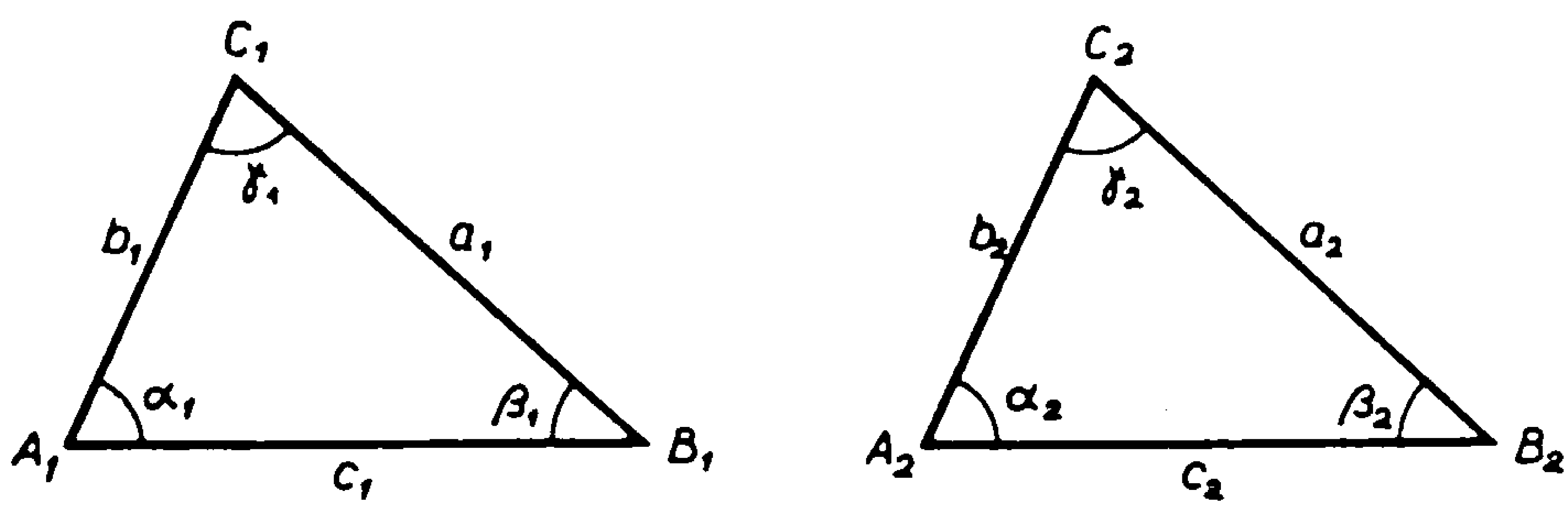
$$\beta' = \alpha + \gamma.$$

Ako je $a \geq b$, tada je $\alpha \geq \beta$.

$a + b > c$, a odatle slijedi: $a > c - b$ i $b > c - a$, gdje je c najveća stranica trokuta.

a) Sukladni trokuti

Dva su trokuta $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ sukladna: ($\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$), tj. podudaraju se u svim pripadnim stranicama i kutovima,



Sl. 2

1) ako se podudaraju u jednoj stranici i dva kuta uz tu stranicu.
$c_1 = c_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$;

2) ako se podudaraju u dvije stranice i kutu među njima:
$b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$;

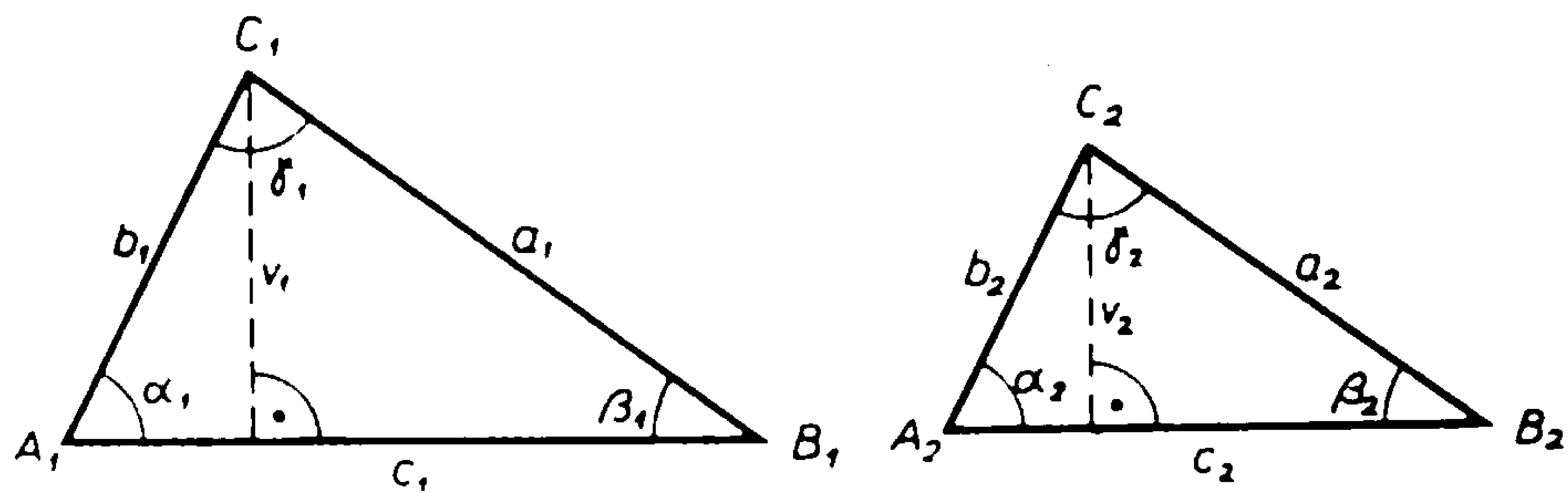
3) ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj od njih:
$a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, i $\alpha_1 = \alpha_2$, ako je $a_1 > b_1$, odn. $a_2 > b_2$;

4) ako se podudaraju u sve tri stranice:
$a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$.

b) Slični trokuti

Dva su trokuta $A_1 B_1 C_1$ i $A_2 B_2 C_2$ slična ($\triangle A_1 B_1 C_1 \sim A_2 B_2 C_2$), tj kutovi jednog trokuta jednaki su po redu kutovima drugog trokuta (homologni kutovi), a homologne stranice stoje im u istom omjeru (razmjerne su):

$$\alpha_1 = \alpha_2, \ \beta_1 = \beta_2, \ \gamma_1 = \gamma_2 \ \text{i} \ a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2.$$



Sl. 3

1) kad se podudaraju u dva kuta

$$\alpha_1 = \alpha_2, \ \beta_1 = \beta_2;$$

2) kad su dvije stranice jednoga razmjerne sa dvije stranice drugoga i kad su im kutovi, koje zatvaraju te dvije stranice, jednaki:

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 \quad \gamma_1 = \gamma_2;$$

3) Kad su dvije stranice jednoga razmjerne sa dvije stranice drugoga i kad su kutovi, koji su nasuprot većim stranicama, jednaki:

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 ; \ \alpha_1 = \alpha_2, \ \text{pri čemu je} \ a_1 > b_1 \ \text{i} \ a_2 > b_2;$$

4) kad su stranice jednoga razmjerne sa stranicama drugoga:

$$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2.$$

U sličnim trokutima stoje u istom stalnom omjeru ne samo stranice trokuta već i njihove visine, simetrale stranica i kutova, opsezi itd.

Tako je npr. $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$ itd.

Ploštine sličnih trokuta odnose se kao kvadrati homolognih stanica, tj.

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{b_1^2}{b_2^2} = \frac{c_1^2}{c_2^2}.$$

c) Četiri značajne tačke trokuta

U jednom trokutu sijeku se u jednoj tački:

1) simetrale stranica (središte trokutu opisane kružnice);

2) simetrale nutarnjih kutova (središte trokutu upisane kružnice);

3) visine, odnosno njihova produženja (ortocentar);

4) težišnice, tj. dužine koje spajaju vrhove trokuta sa sredinama suprotnih stranica. Težište dijeli težišnicu u dva dijela; onaj do stranice jednak je trećini težišnice.

Samo u istostraničnom trokutu padaju sve četiri tačke zajedno.

d) Površina trokuta

$$P = \frac{c \cdot v}{2} = \sqrt{s(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} = \rho \cdot s = \frac{abc}{4r}$$

($2s = a + b + c$, ρ — polumjer upisane kružnice,

r — polumjer opisane kružnice).

(Vidi također: Goniometrija i trigonometrija, § 15).

e) Pravokutni trokut

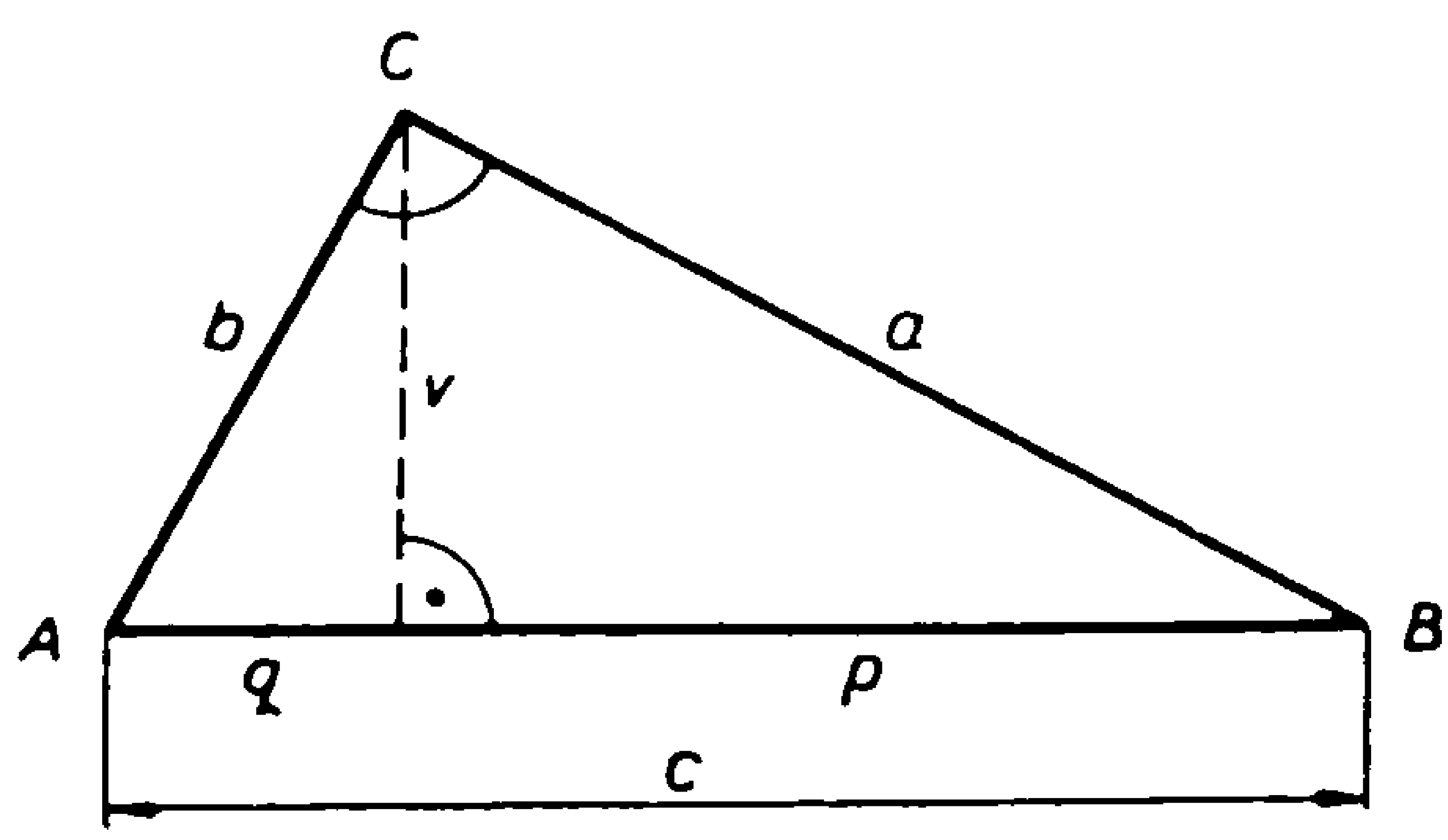
1) Pitagorin poučak (Sl. 4):

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Kvadrat hipotenuze jednak je zbroju kvadrata kateta.

Odatle:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}; \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$



Sl. 4

2) Euklidovi poučci (sl. 4):

$p : v = v : q$, odatle $v = \sqrt{pq}$

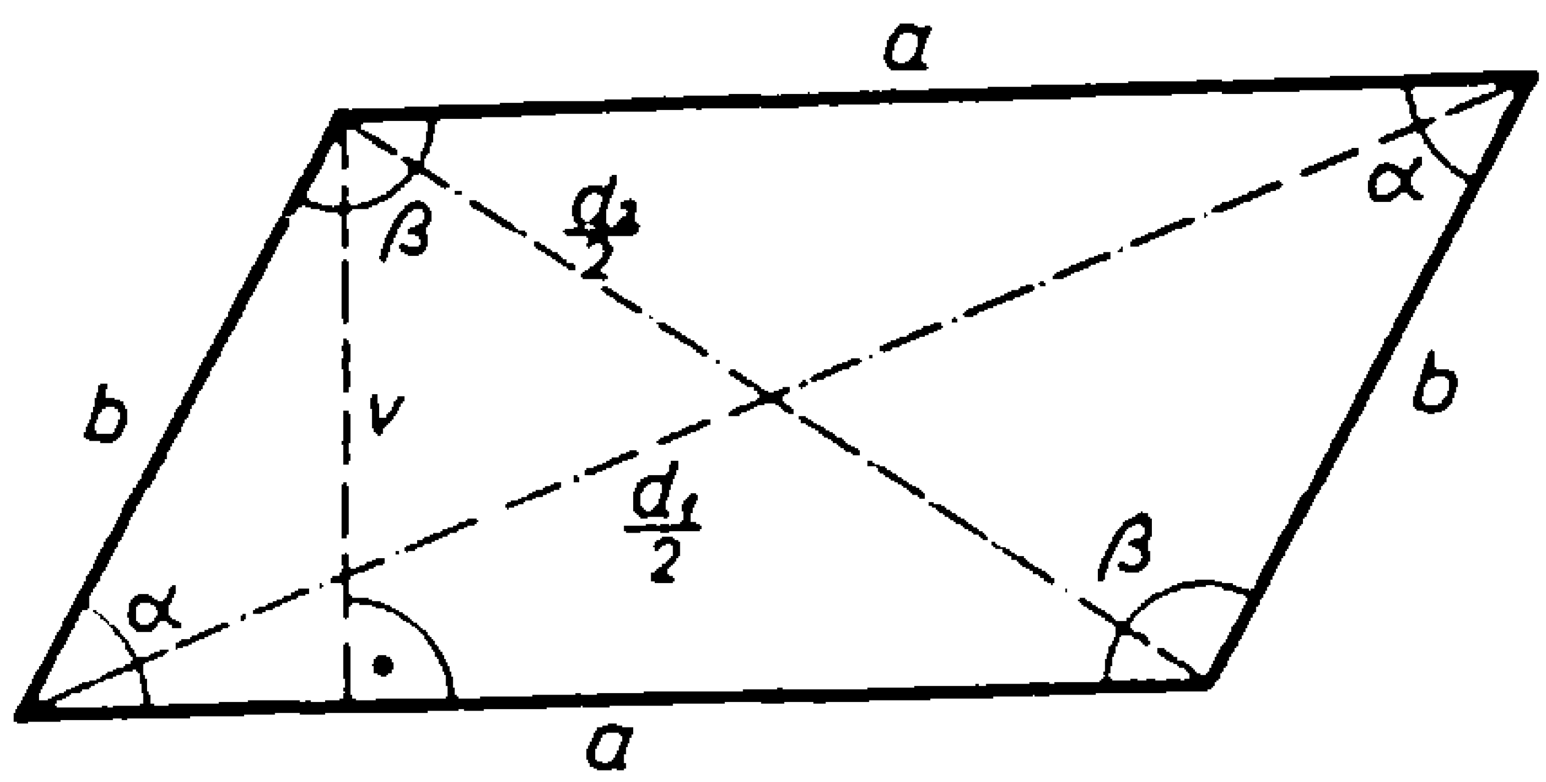
$c : a = a : p$, odatle $a = \sqrt{cp}$

$c : b = b : q$, odatle $b = \sqrt{cq}$, tj.:

Visina na hipotenuzu je srednja geometrijska proporcionala između odrezaka hipotenuze, a svaka kateta je srednja geometrijska proporcionala između čitave hipotenuze i odreska hipotenuze uz tu katetu.

2. ČETVEROKUTI

Zbroj nutarnjih kutova iznosi 360°.



Sl. 5

a) Paralelogram

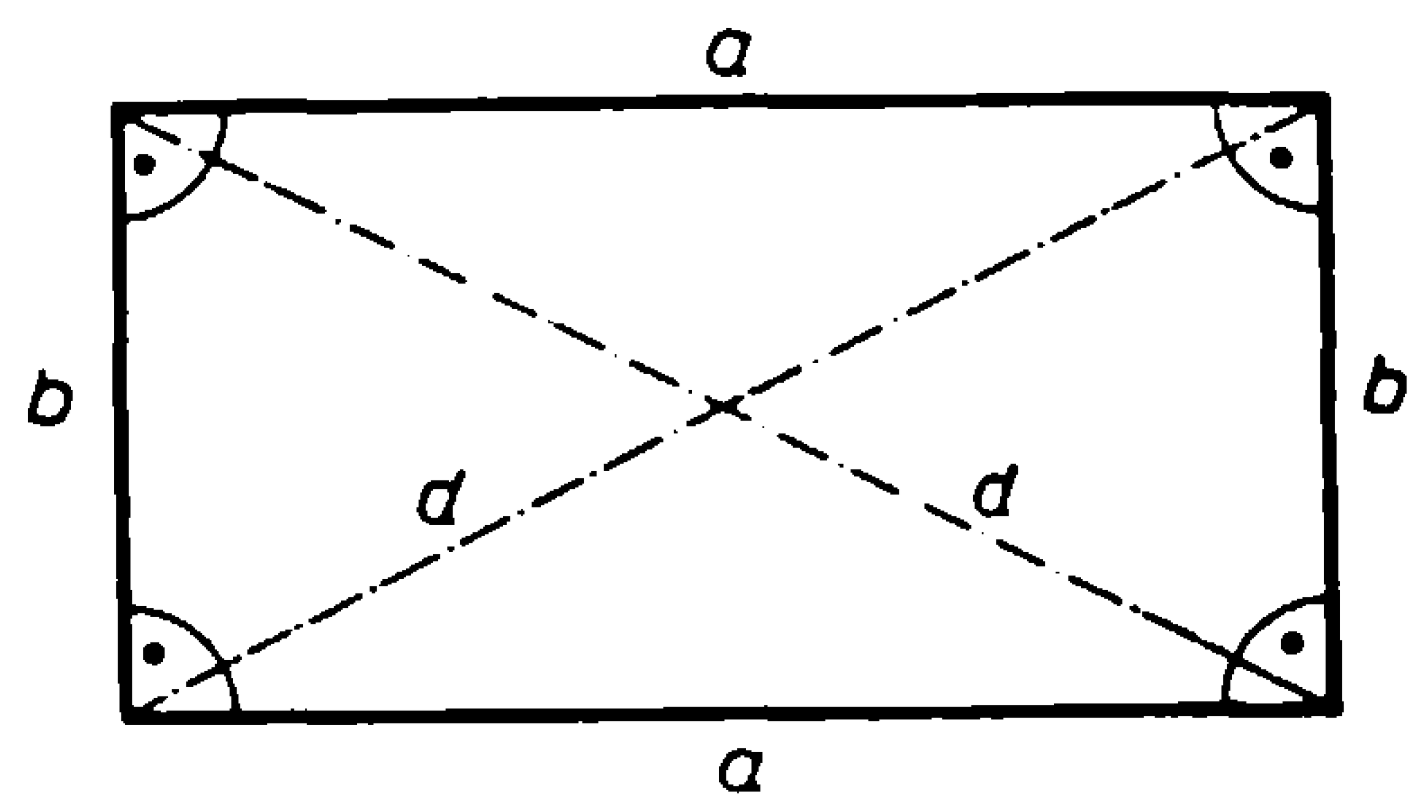
Suprotne su stranice usporedne i jednake, suprotni kutovi jednaki, dijagonale raspolavljaju jedna drugu.

Ploština $P = a \cdot v$ (osnovka puta visina).

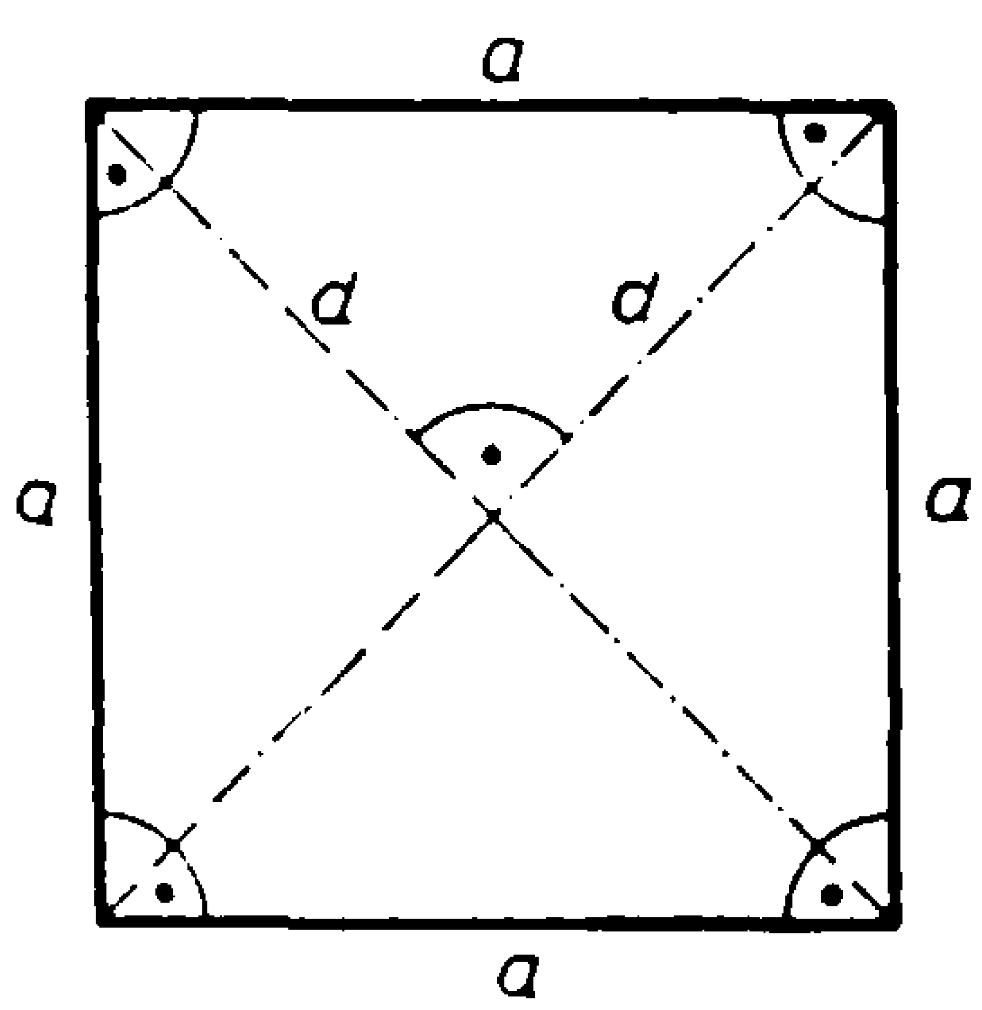
b) Pravokutnik

Suprotne su stranice usporedne i jednake, svi kutovi pravi, dijagonale d jednake.

Ploština $P = a \cdot b$.



Sl. 6



Sl. 7

c) Kvadrat (istostranični pravokutnik)

Sve su stranice jednake, svi kutovi pravi, dijagonale d jednake, međusobno okomite i raspoljavaju kutove kvadrata.

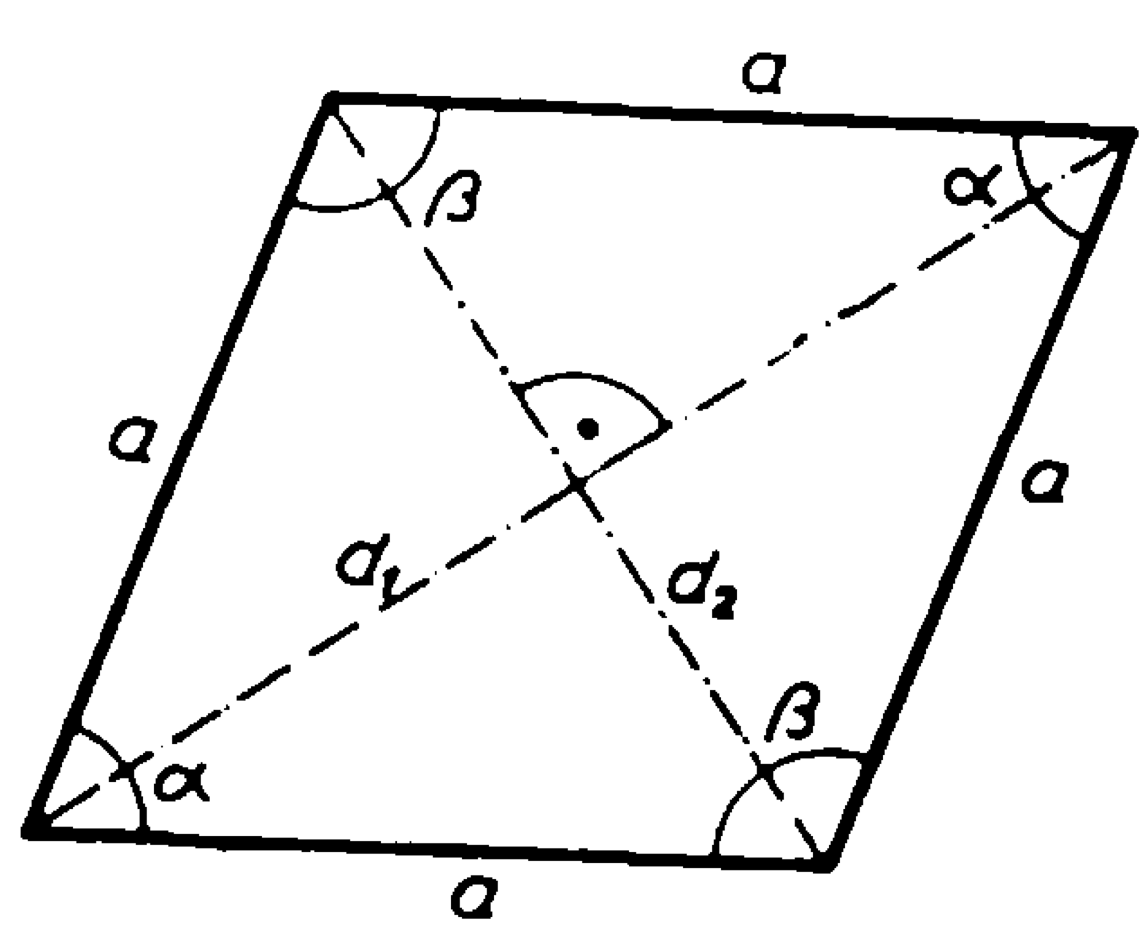
Ploština $P = a^2$ i $P = \frac{d^2}{2}$

d) Romb (istostranični paralelogram)

Sve su stranice jednake, suprotni kutovi jednaki, dijagonale d_1 i d_2 nejednake, stoje okomito jedna na drugoj i raspolavljaju kutove romba.

Ploština $P = a \cdot v$ i $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

(polovica umnoška dijagonala).



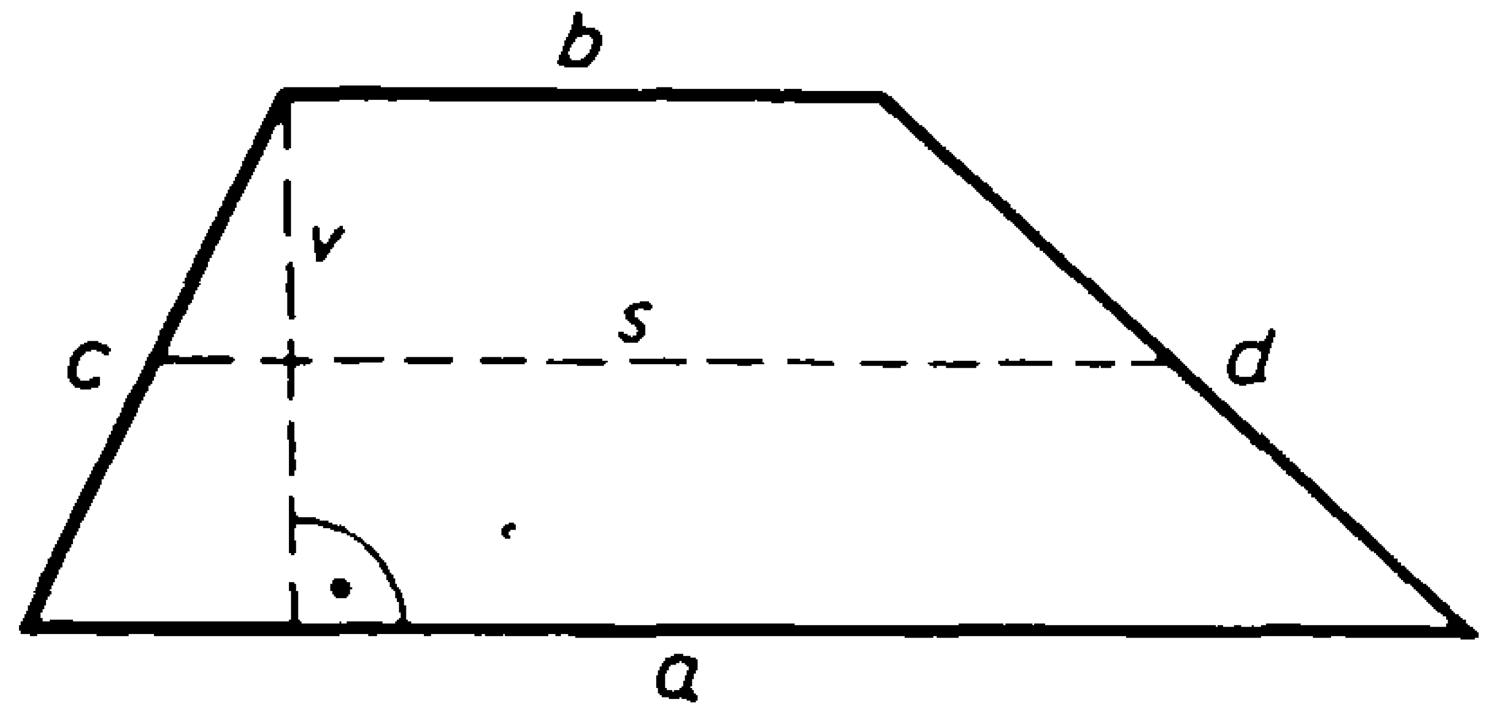
Sl. 8

e) Trapez

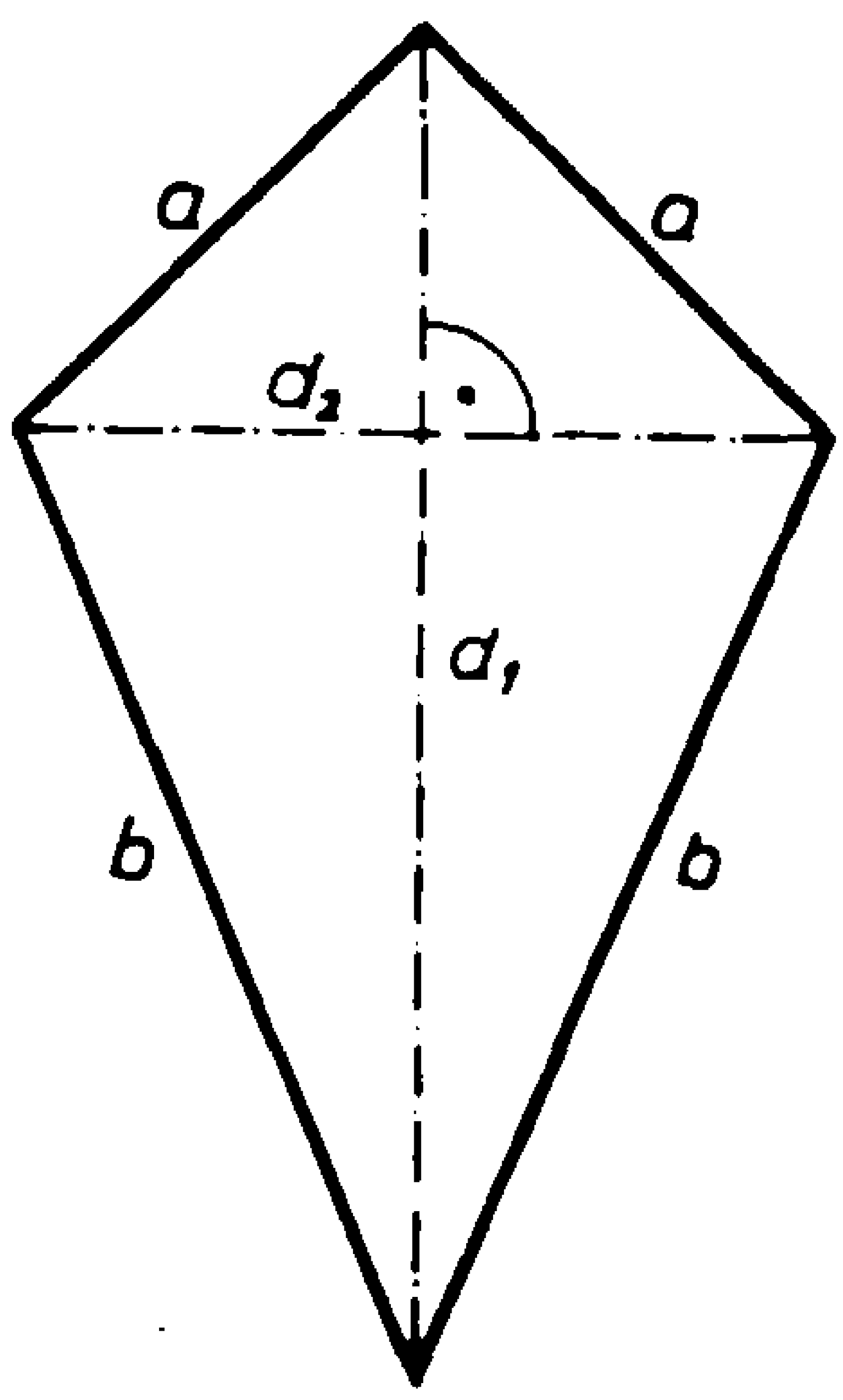
Samo su dvije suprotne stranice a i b (osnovke) usporedne. Srednjica s, tj. dužina koja spaja sredine neusporednih stranica (krakova), usporedna je s osnovkama i jednaka njihovom poluzbroju, tj.

$$s = \frac{a+b}{2}.$$

Ploština $P = \frac{v(a+b)}{2} = v \cdot s.$



Sl. 9.



Sl. 10

f) Deltoid

Po dvije susjedne stranice su jednake, dijagonale d_1 i d_2 stoje okomito jedna na drugoj.

Ploština $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$

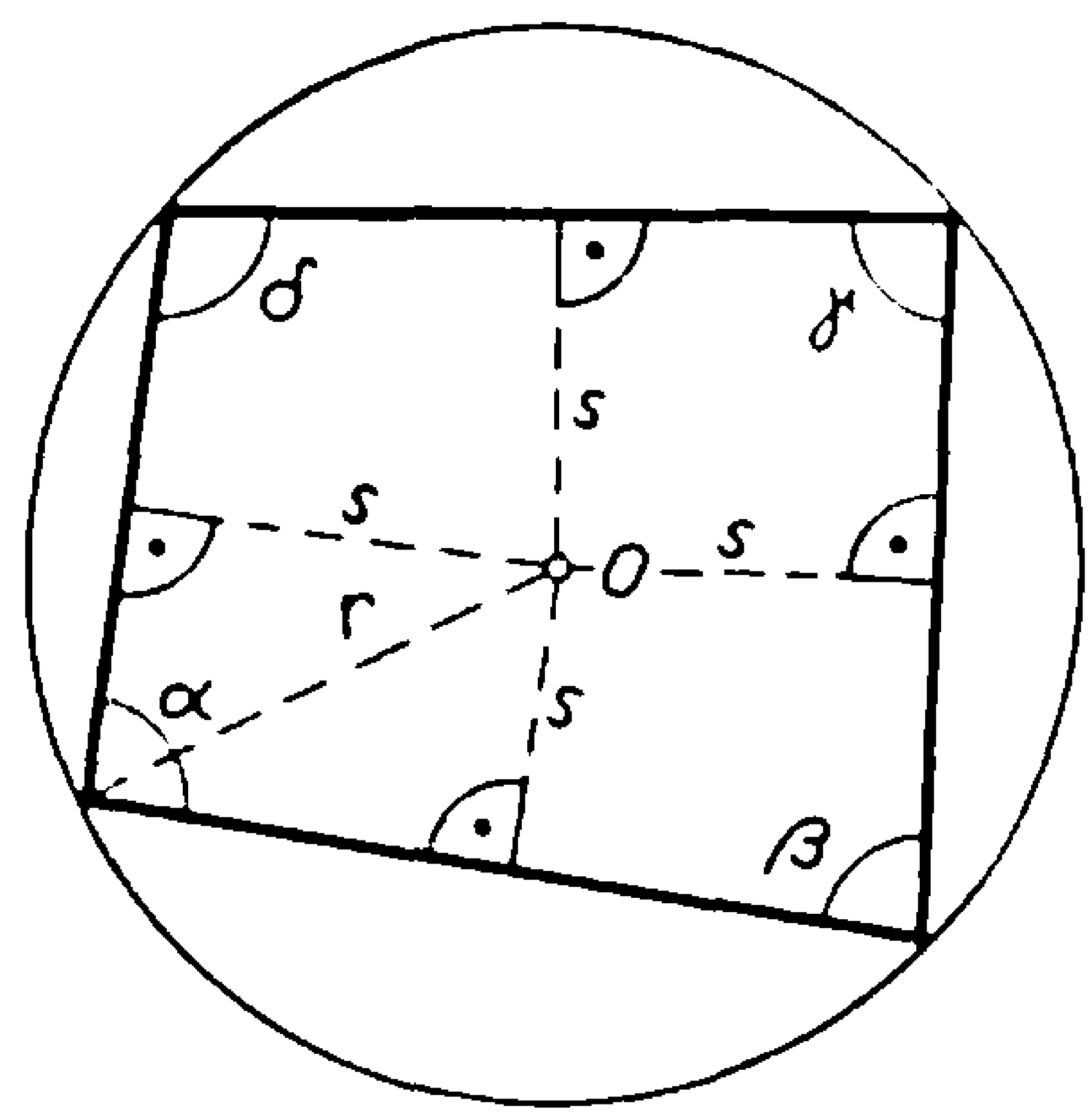
g) Tetivni četverokut

To je četverokut kojemu se kružnica može opisati.

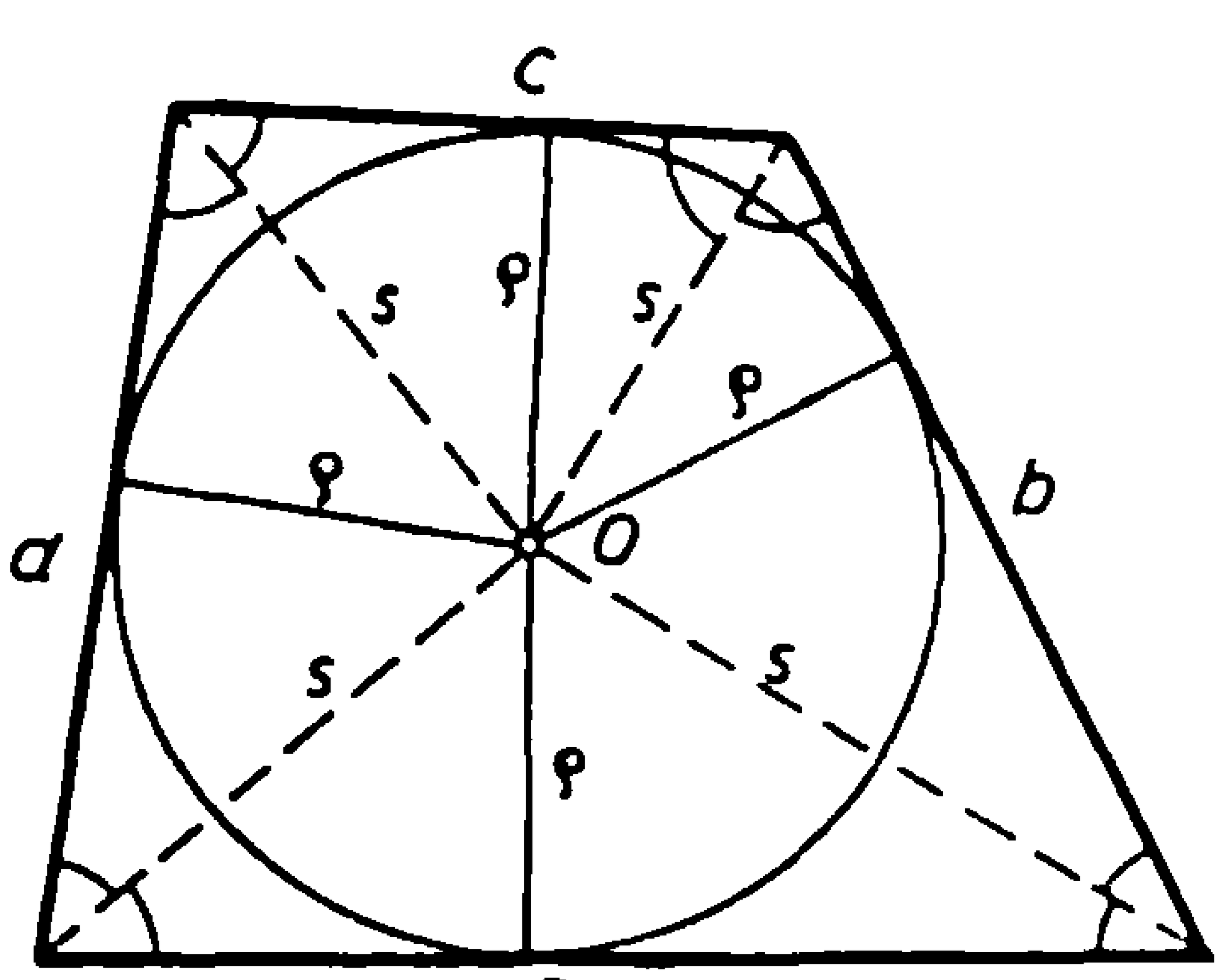
Središte O se nalazi u sjecištu simetrala s stranica.

Suprotni su kutovi suplemetni jer je njihov zbroj 180°, tj. $\alpha + \gamma = 180°$ i $\beta + \delta = 180°$.

(Pravokutnik i kvadrat su također tetivni četverokuti).



Sl. 11



Sl. 12

h) Tangentni četverokut

Tome četverokutu kružnica se može upisati.

Središte O se nalazi u sjecištu simetrala s kutova.

Zbroj dviju suprotnih stranica jednak je zbroju drugih dviju stranica, tj.

$$a + c = b + d.$$

(Kvadrat i romb su također tangentni četvorokuti).

3. MNOGOKUTI (POLIGONI)

a) Općenito

Broj dijagonala $D = \dfrac{n(n-3)}{2}$

(n = broj stranica mnogokuta).

Zbroj nutarnjih kutova

$$S = (n-2) \cdot 180^0.$$

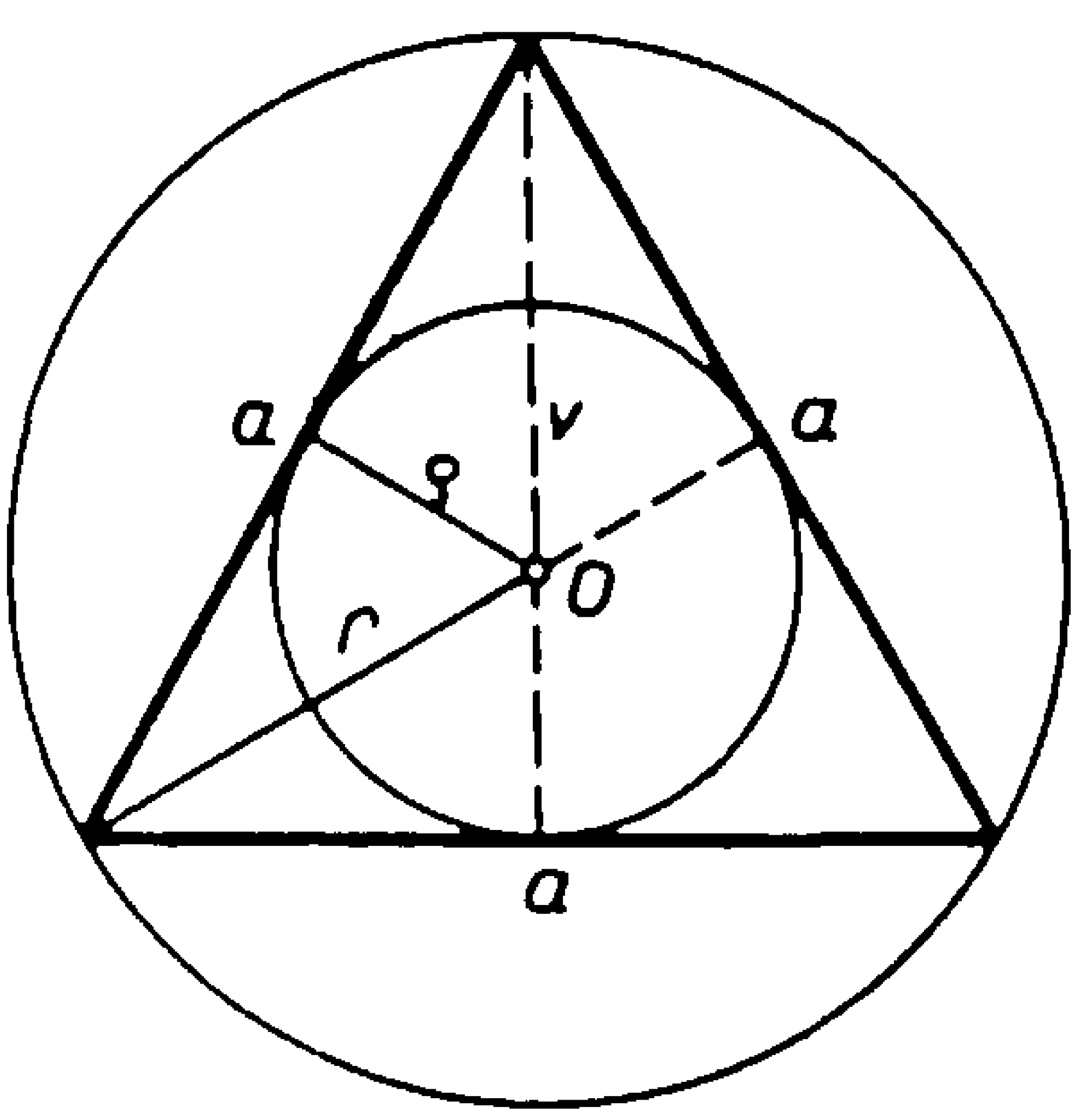
b) Pravilni mnogokuti

To su mnogokuti u kojima su sve stranice i svi kutovi jednaki. Svakom se pravilnom mnogokutu može kružnica opisati i upisati. Nutarnji kut iznosi $\dfrac{(n-2) \cdot 180^0}{n}$, gdje je n — broj stranica mnogokuta.

Oznaka:

a — stranica pravilnog mnogokuta
r — polumjer opisane kružnice
ϱ — polumjer upisane kružnice
v — visina
P — ploština

1) Trokut

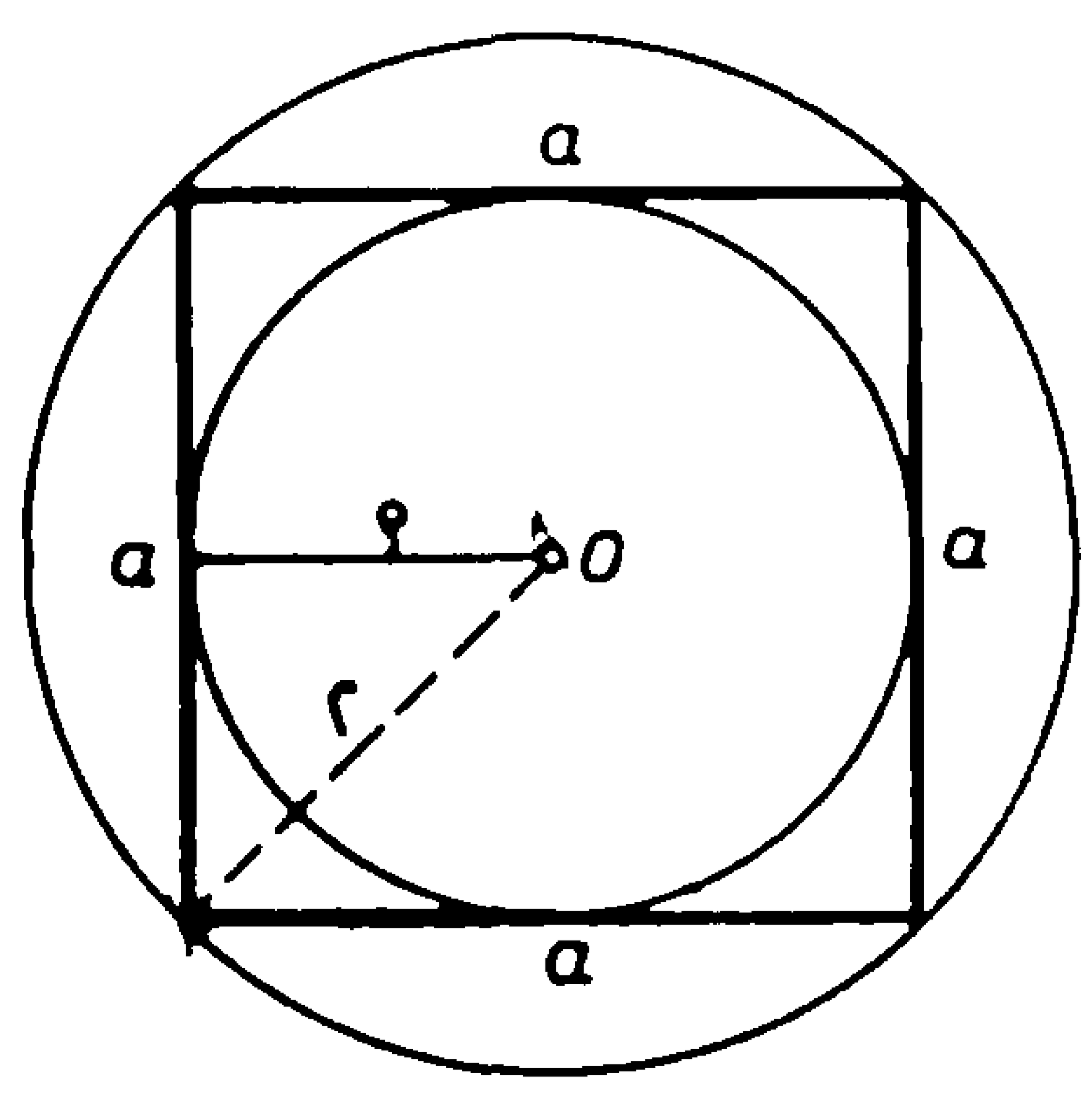


Sl. 13

$$a = r\sqrt{3} = 2\rho\sqrt{3};\ r = 2\rho$$

$$v = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{3r}{2} = 3\rho;\ a = \frac{2v\sqrt{3}}{3}$$

$$P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{v^2}{3}\sqrt{3} = \frac{3r^2}{4}\sqrt{3} = 3\rho^2\sqrt{3}.$$



Sl. 14

2) Kvadrat

$$a = r\sqrt{2} = 2\varrho$$

$$P = a^2 = 2r^2 = 4\varrho^2.$$

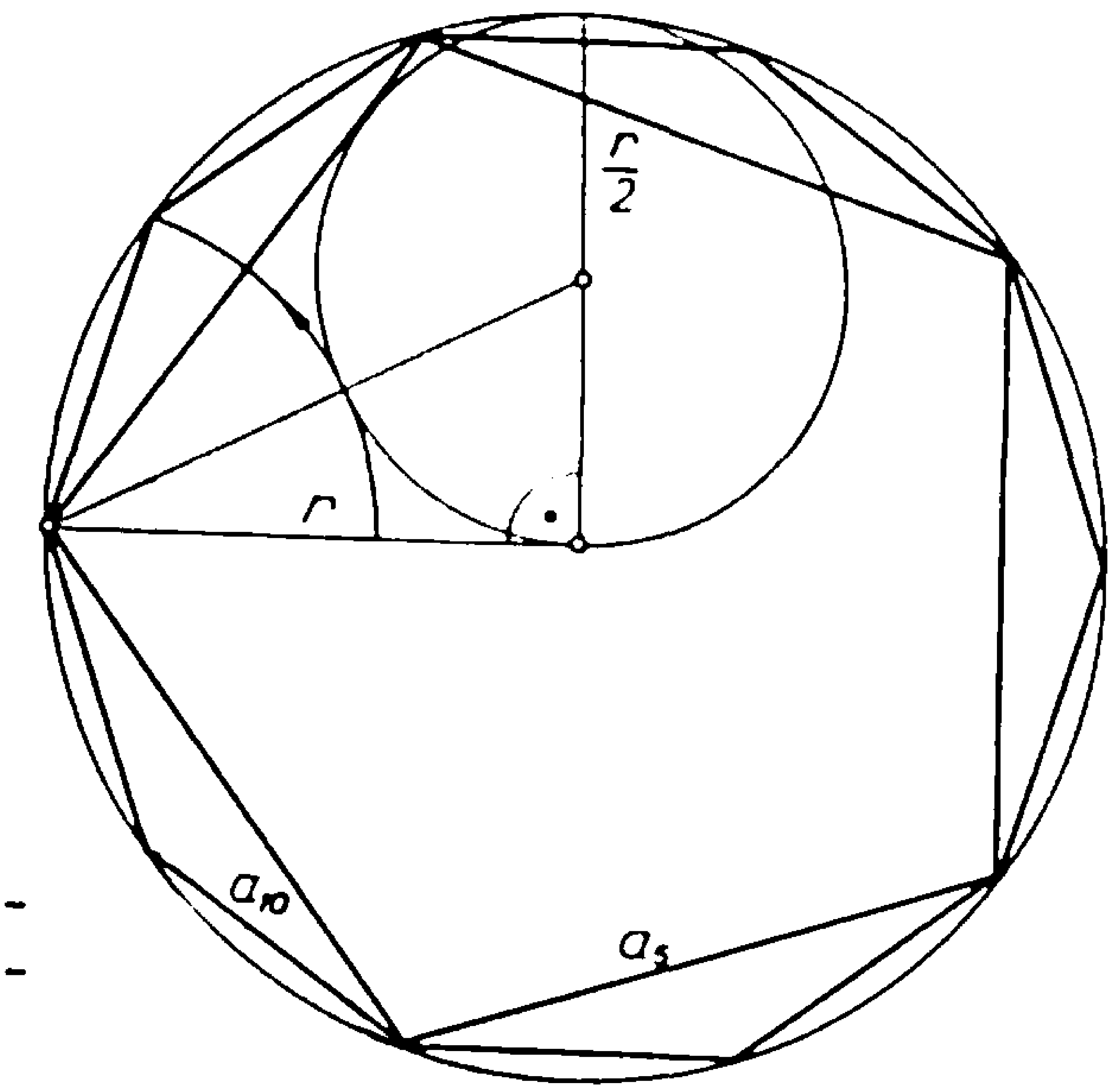
3. Peterokut

$$a = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2\rho\sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

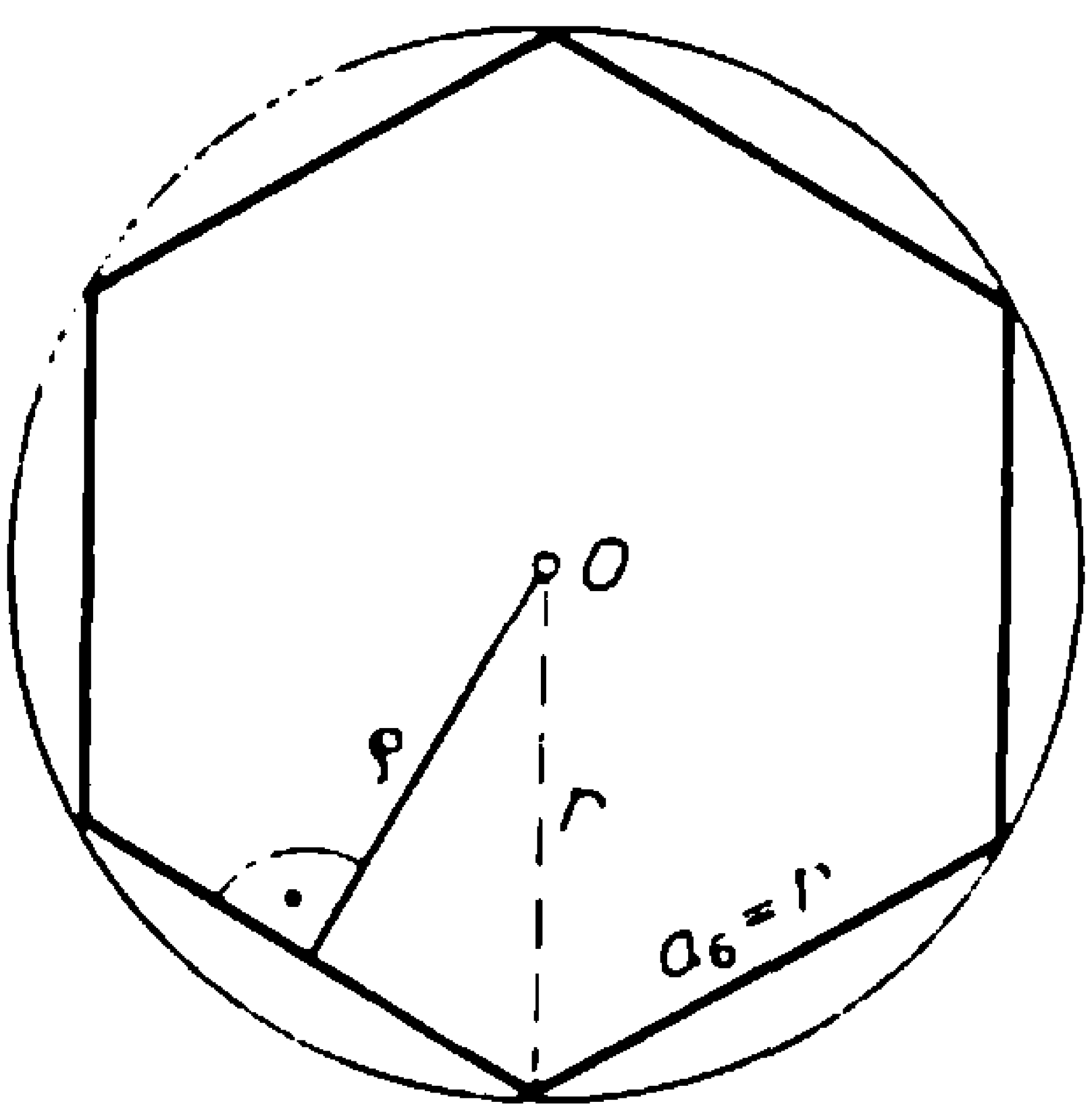
$$P = \frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{5r^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 5\rho^2\sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

Na sl. 15 prikazana je konstrukcija peterokuta, odnosno deseterokuta.



Sl. 15



Sl. 16

4) Šesterokut

$$a = r = \frac{2}{3}\rho\sqrt{3}$$

$$P = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3} = \frac{3r^2}{2}\sqrt{3} = 2\rho^2\sqrt{3}.$$

5) Osmerokut

$$a = r\sqrt{2-\sqrt{2}} = 2\rho\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)$$

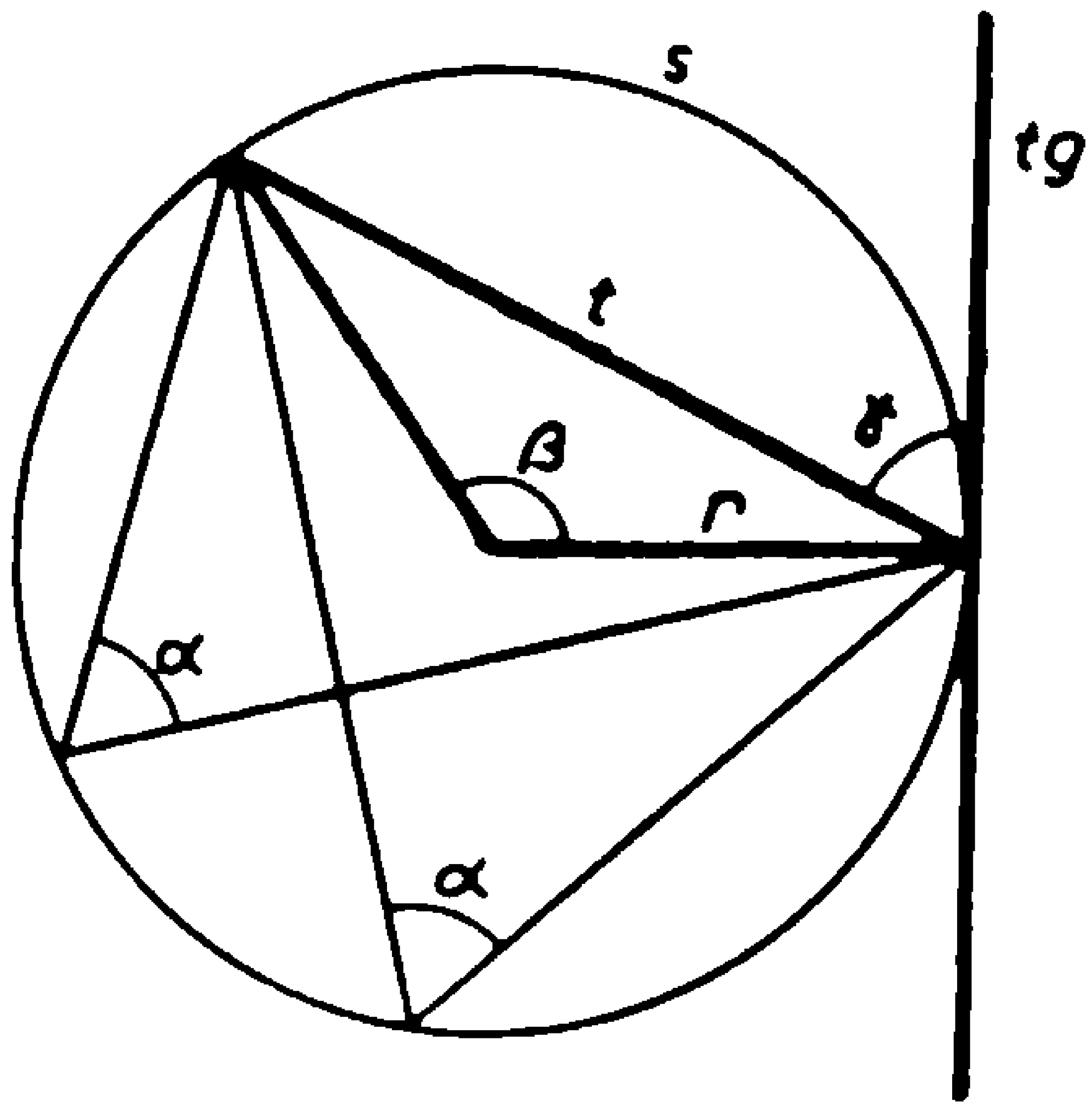
$$P = 2\,a^2\,(\sqrt{2}+1) = 2\,r^2\sqrt{2} = 8\,\rho^2\,(\sqrt{2}-1).$$

6) Deseterokut

$$a = \frac{r}{2}\,(\sqrt{5}-1) = \frac{2\rho}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$$

$$P = \frac{5a^2}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{5r^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2\rho^2\sqrt{25-10\sqrt{2}}.$$

a) Kutovi u kružnici



Sl. 17

Obodni kut α je polovica središnjeg kuta β koji leži nad istim lukom.

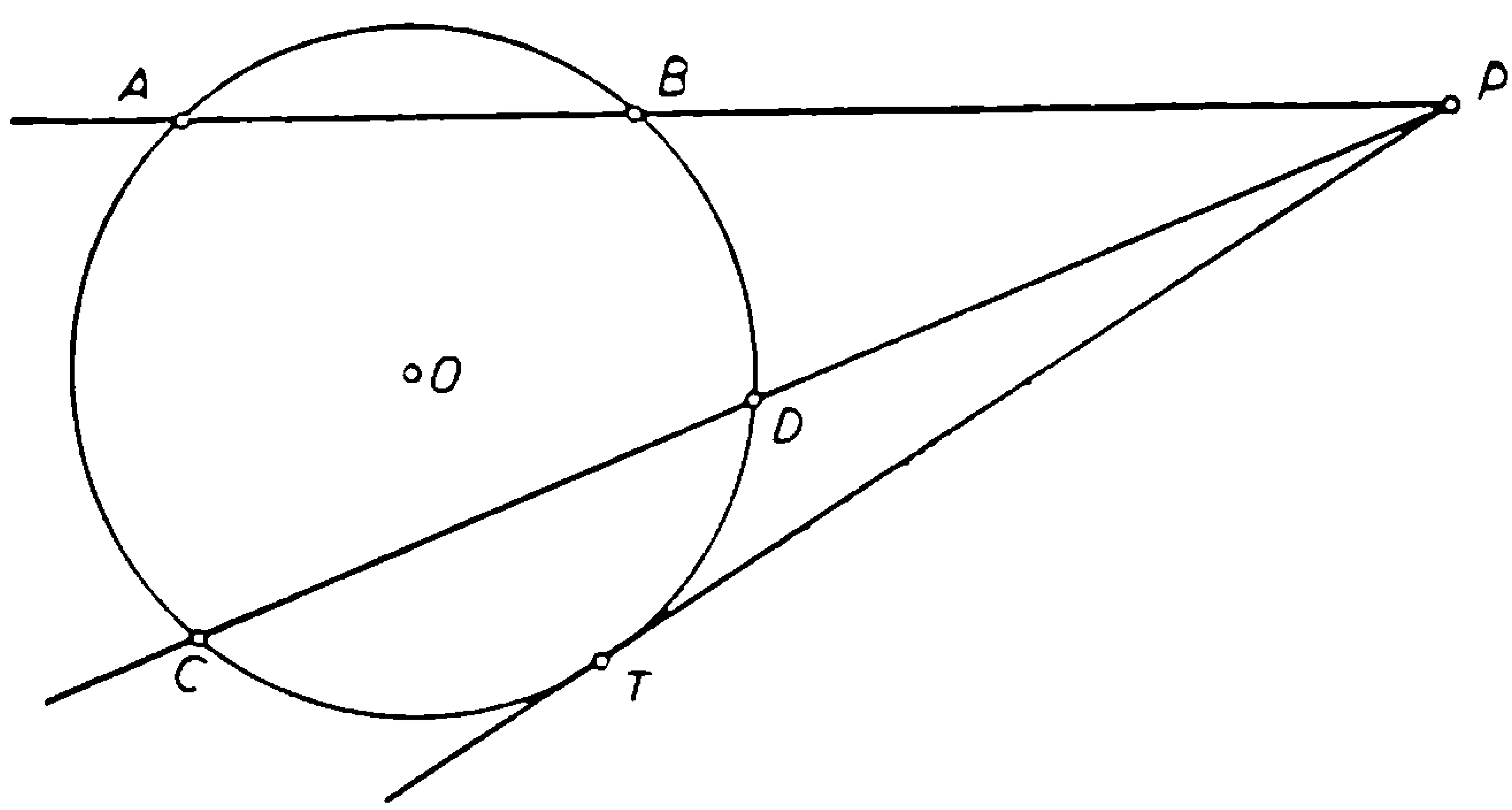
Slijedi: 1) Obodni kut nad polukružnicom (ili nad promjerom) je pravi.

2) Obodni kutovi nad istim lukom jednaki su.

Kut γ među tangentom i tetivom jednak je obodnom kutu α, koji leži nad lukom između tangente i tetive.

$$\gamma = \alpha = \frac{\beta}{2}.$$

b) Sekanta i tangenta



Sl. 18

$$AP : CP = DP : BP \quad \text{(vidi sl. 18).}$$

Okrenemo li sekantu CP oko tačke P tako da zauzme položaj PT, bit će:

$$CP = PT$$

$$DP = PT.$$

Uvrštenje daje:

$$AP : PT = PT : BP$$

To znači:

Odrezak tangente je srednja geometrijska proporcionala između čitave sekante i njenog vanjskog odreska.

c) Opseg i površina

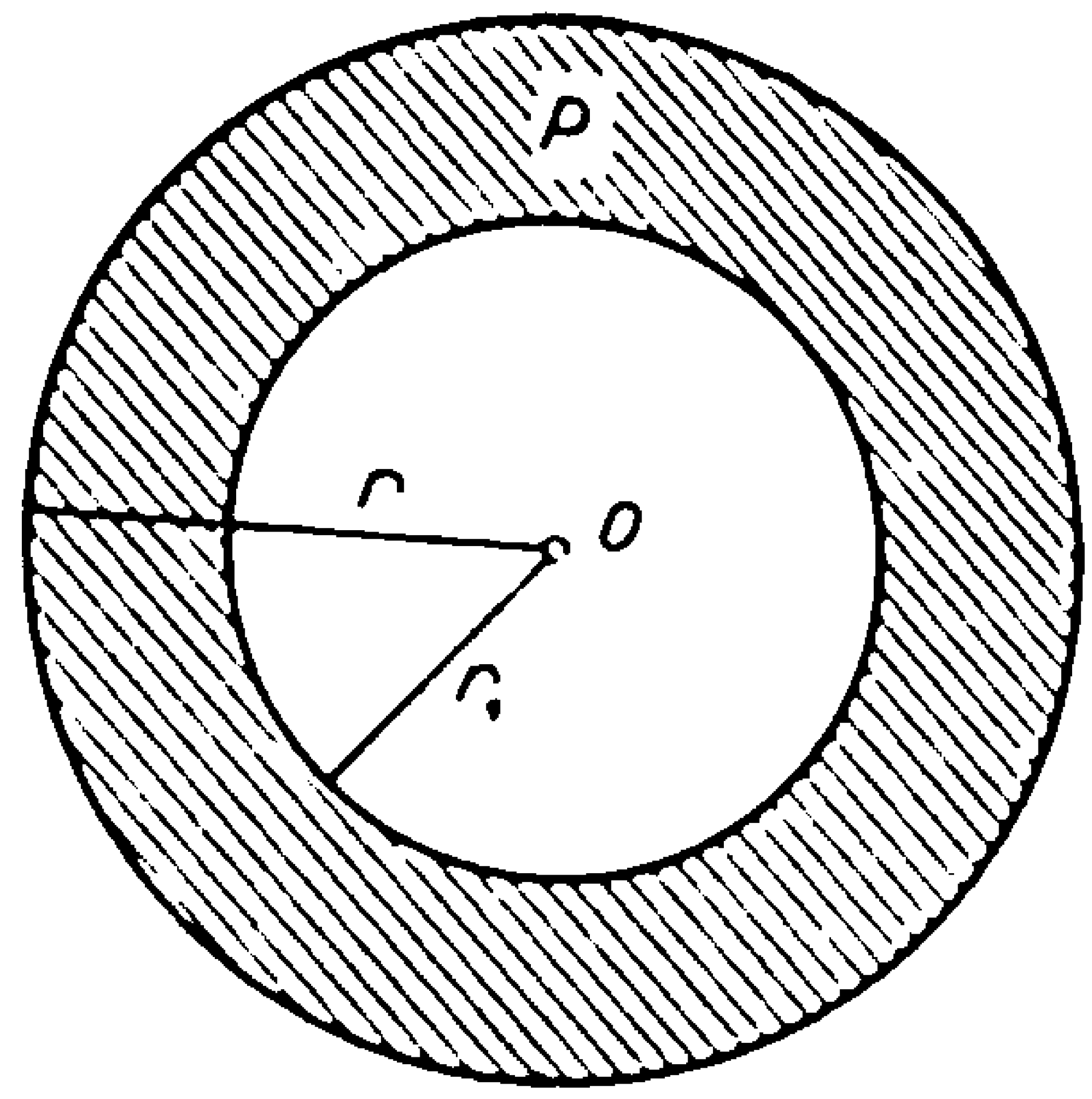
1. Opseg kruga:

$$O = 2\,r\,\pi = d\,\pi.$$

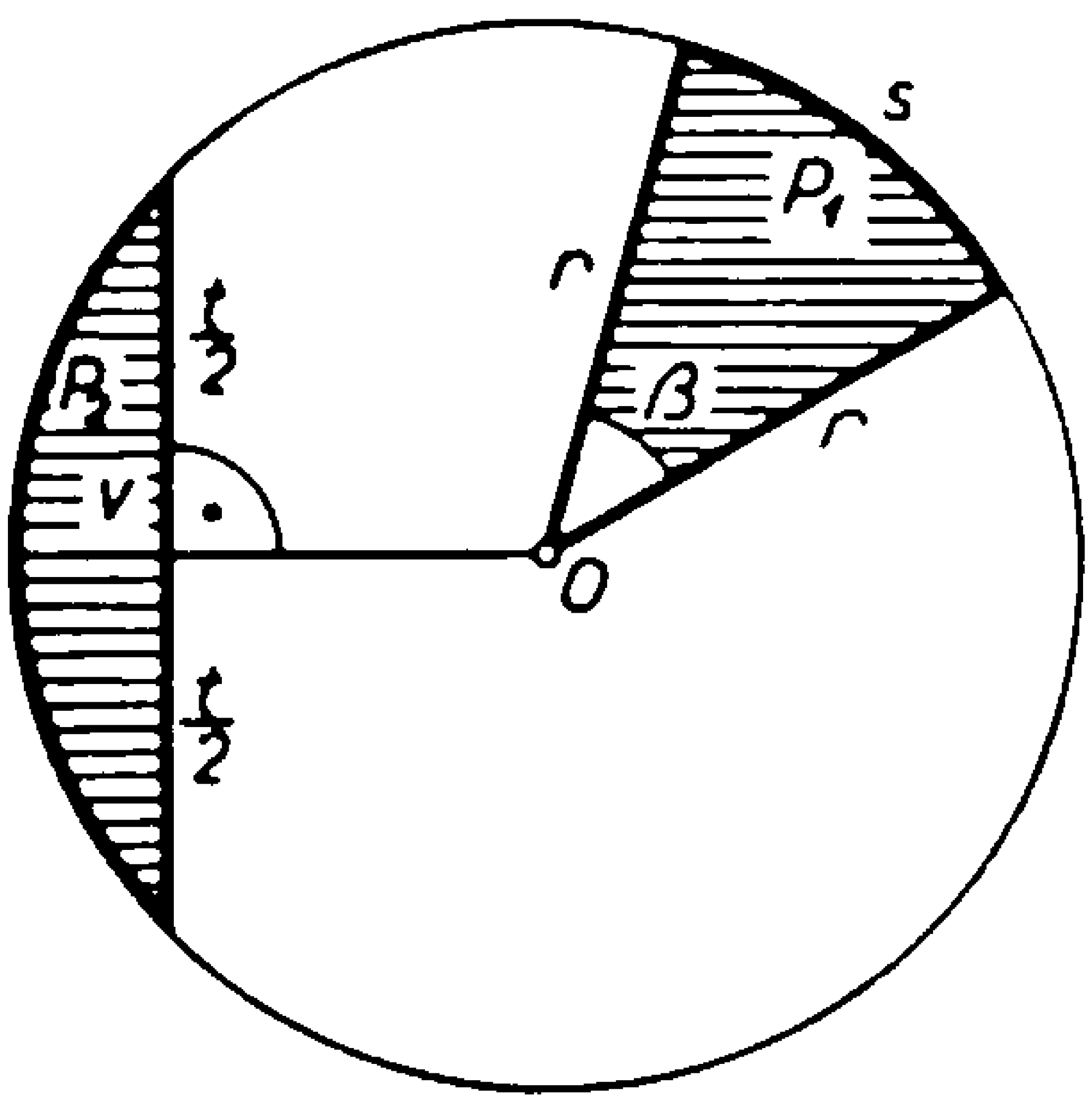
2. Dužina kružnog luka $s = \dfrac{r\pi\beta^0}{180^0}$

(β-središnji kut).

3. Ploština kruga $P = r^2\pi = \dfrac{\pi d^2}{4}$.



Sl. 19



Sl. 20

4. Ploština kružnog vijenca (sl. 19)

$P = \pi\,r^2 - \pi r_1{}^2 = \pi\,(r^2 - r_1{}^2)$

5. Ploština isječka $P_1 = \dfrac{r^2\pi\beta^0}{360^0} = \dfrac{s\,r}{2}$

(sl. 20).

6. Ploština odsječka $P_2 = \dfrac{r\,(s - t) + t \cdot v}{2}$

(sl. 20).

(t — tetiva

v — visina odsječka).

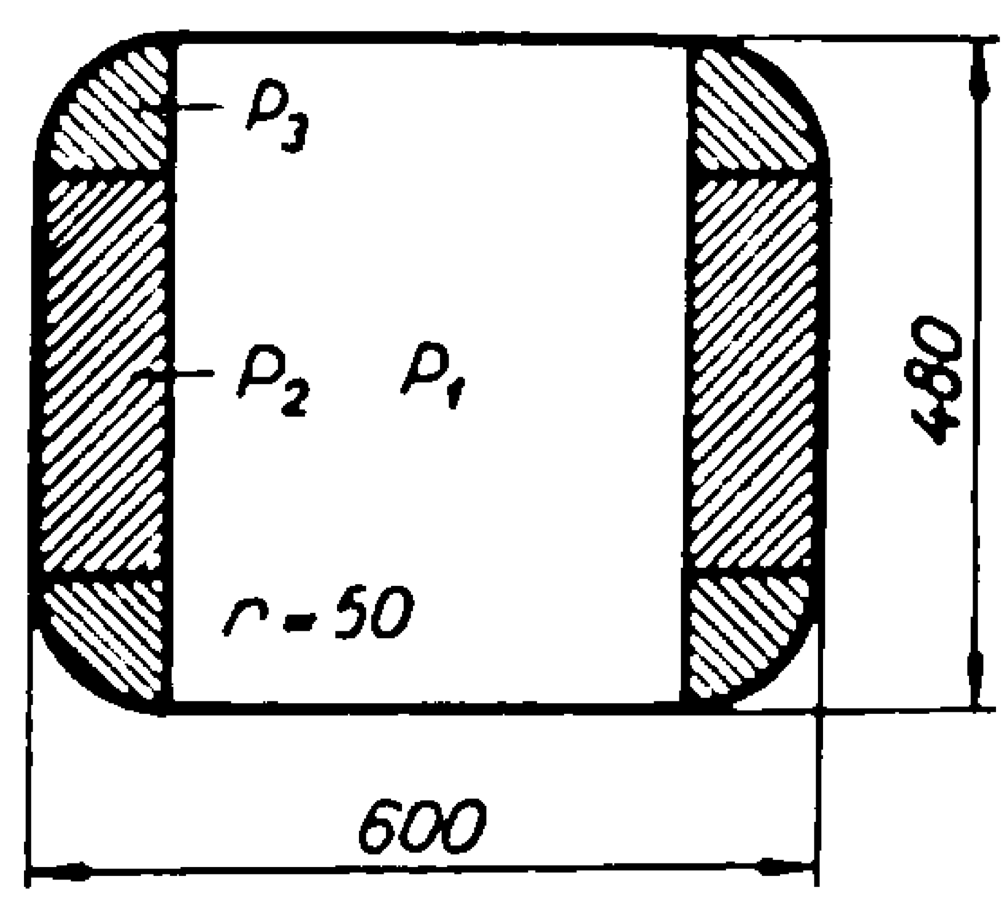
Primjer:

Kolika je težina čelične ploče (sl. 21), ako 1 dm² teži 1,97 kg?

1. Ploština:

$P = P_1 + 2P_2 + 4P_3$

$P_1 = (6{,}0 - 2 \cdot 0{,}5) \cdot 4{,}8$	$= 5{,}0 \cdot 4{,}8 =$	24,0 dm²
$2P_2 = 2 \cdot 0{,}5 \cdot (4{,}8 - 2 \cdot 0{,}5)$	$= 1{,}0 \cdot 3{,}8 =$	3,8 „
$4P_4 = \pi \cdot 0{,}5^2 = 3{,}14 \cdot 0{,}25$	$=$	0,79 „
$\underline{P =}$	$=$	$\underline{28{,}59\ \text{dm}^2}$



Sl. 21

2. Težina:

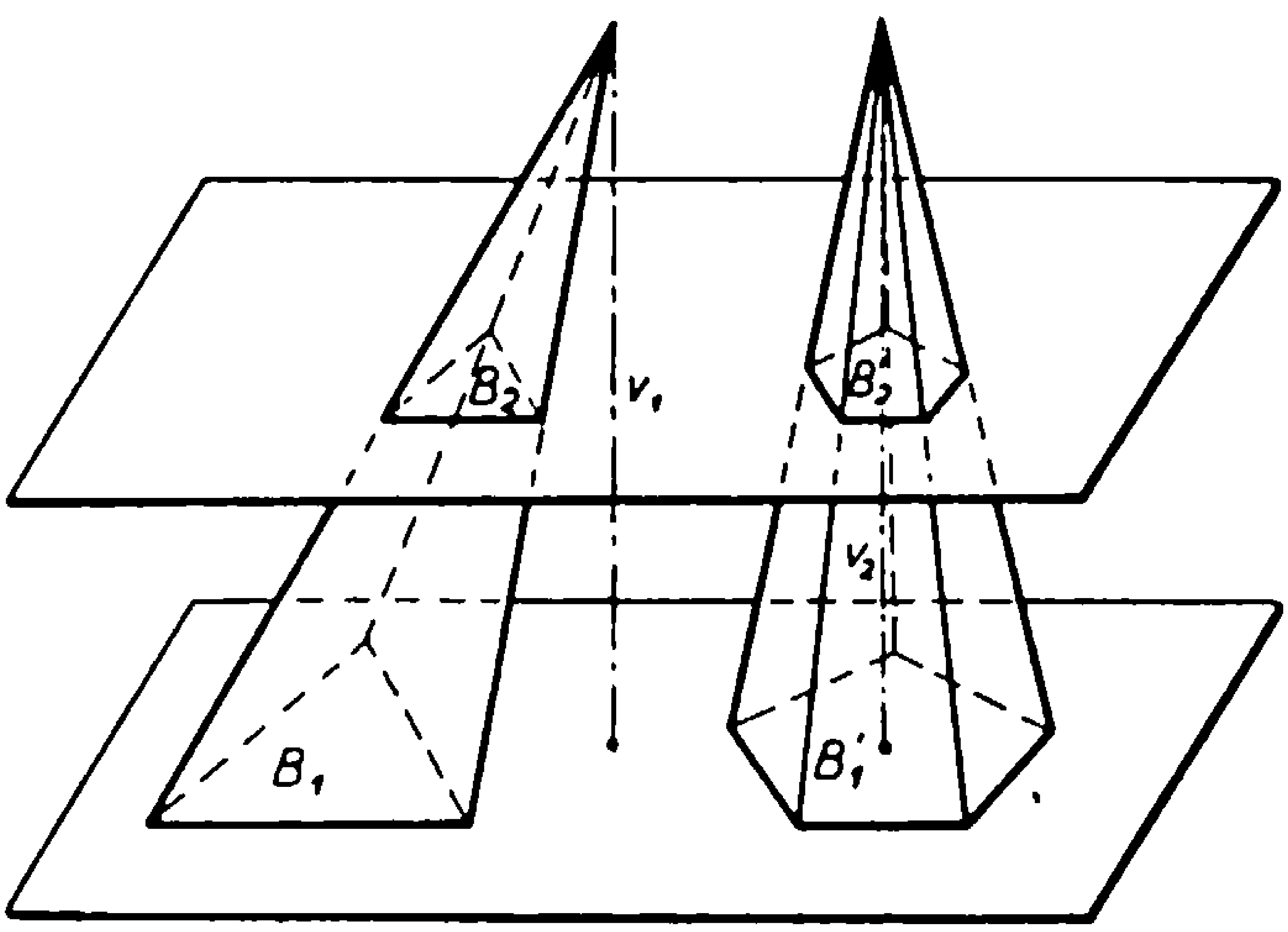
$\underline{G} = P \cdot \gamma = 28{,}59 \cdot 1{,}97 = \underline{56{,}3\ \text{kg}}.$

§ 2. STEREOMETRIJA (OPLOŠJE I OBUJAM)

1. CAVALIERIJEV STAVAK

Određivanje obujma vrši se na temelju Cavalierijevog stavka:

Dva tijela imaju jednak obujam ako imaju jednake osnovke (tj. osnovke jednakih ploština) i jednake visine i ako ravnina usporedna s osnovkama tjelesa siječe oba tijela u presjecima jednakih ploština.



Sl. 22

Sl. 22 prikazuje dvije piramide jednakog obujma, jer je:

$$B_1 = B'_1$$

$$v_1 = v_2$$

$$B_2 = B'_2.$$

2. IZRAČUNAVANJE OPLOŠJA I OBUJMA (VOLUMENA) GEOMETRIJSKIH TJELESA

Oznaka:

O — oplošje, tj. zbroj površina svih međašnjih ploha tijeha.

P — pobočje, tj. zbroj površina bočnih ploha tijela (plašt za obla tijela).

B — ploština osnovke

$a, b, c \ldots.$ bridovi

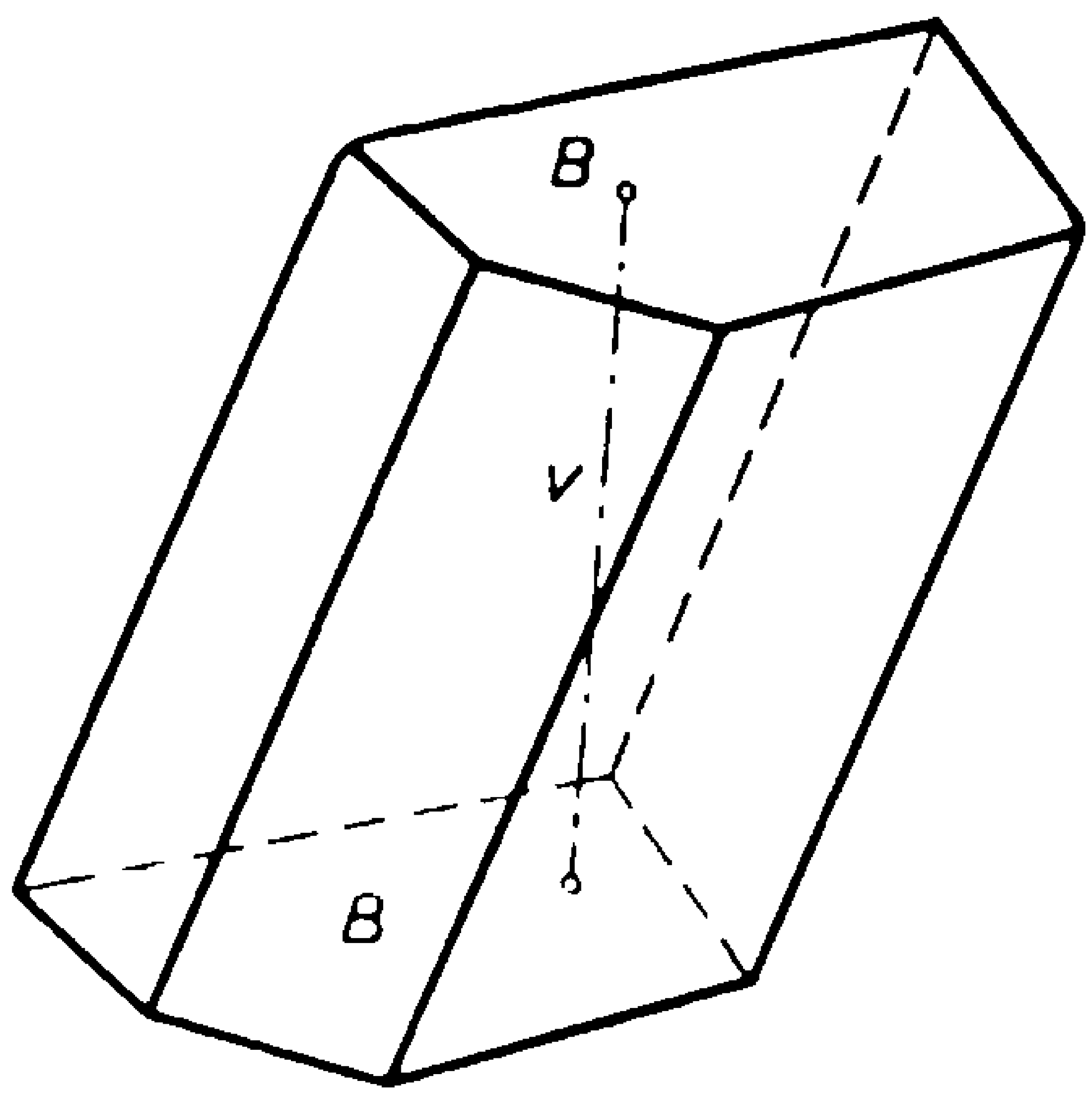
V — obujam (volumen) tijela

v — visina tijela

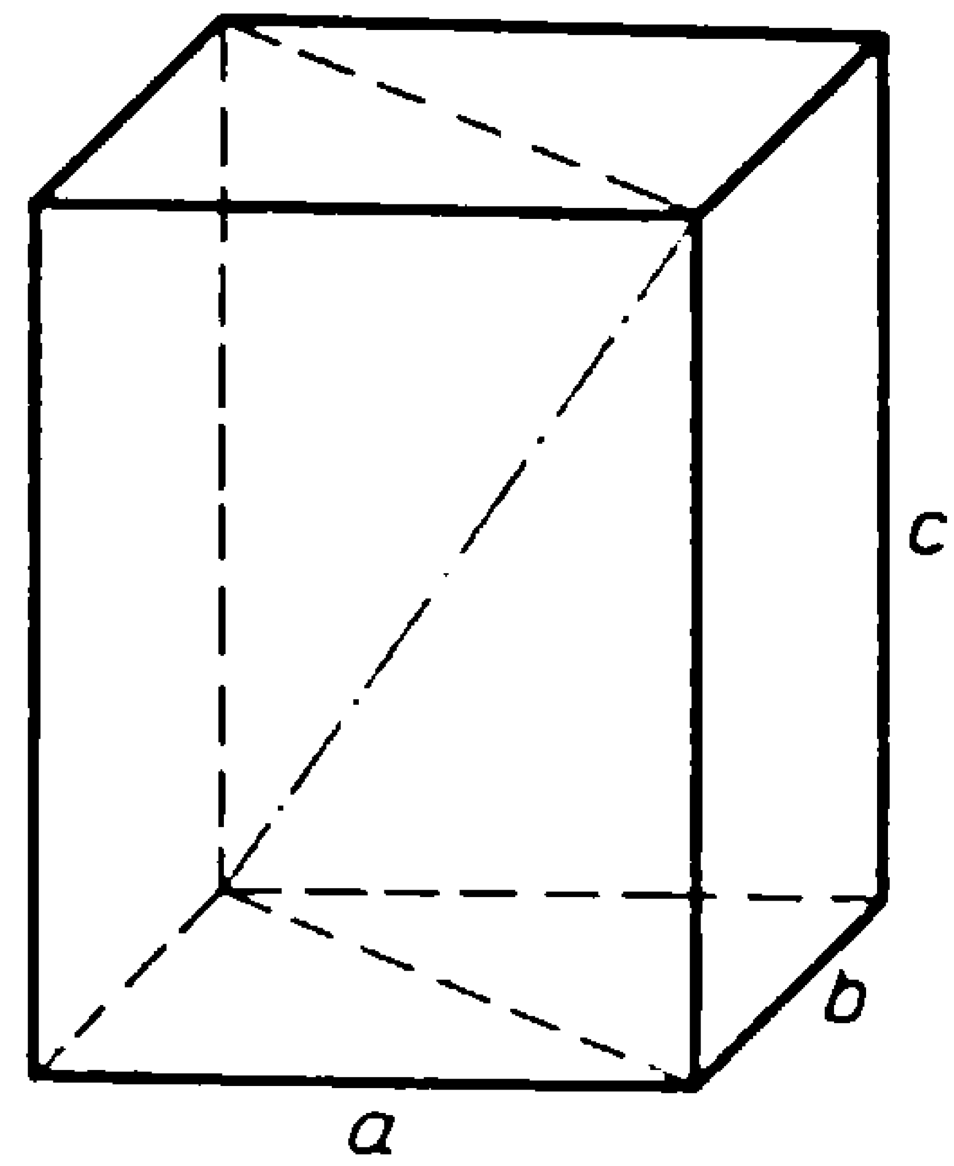
a) **Prizma** (sl. 23)

1. Kosa i uspravna prizma:

$$O = 2B + P.$$



Sl. 23



Sl. 24

Sve prizme jednakih osnovaka i jednakih visina imaju isti obujam

$$V = B \cdot v \quad \text{(osnovka puta visina).}$$

2. Uspravna prizma (bridovi stoje okomito na osnovkama)

$$P = o \cdot v \quad (o \text{ — opseg osnovke})$$

a) Pravokutni paralelepiped (sl. 24)

$$O = 2(ab + ac + bc); \quad V = abc$$

b) Kocka

$$O = 6a^2; \quad V = a^3.$$

b) Piramida

1. Uspravna i kosa piramida

$$O = B + P$$

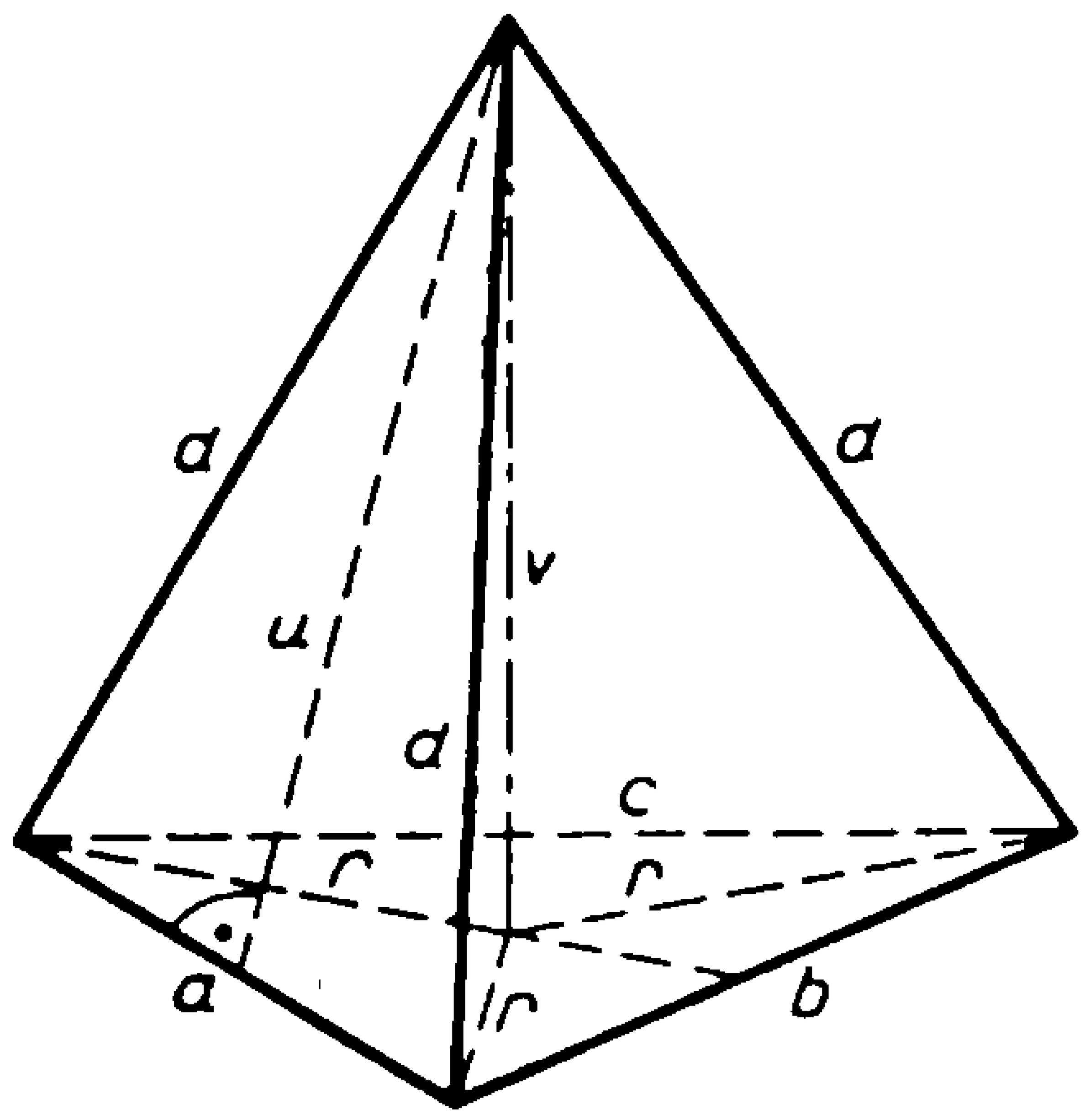
Sve piramide jednakih osnovaka i visina imaju isti obujam

$$V = \frac{B \cdot v}{3} \quad \left(\frac{1}{3} \text{ osnovke puta visina}\right).$$

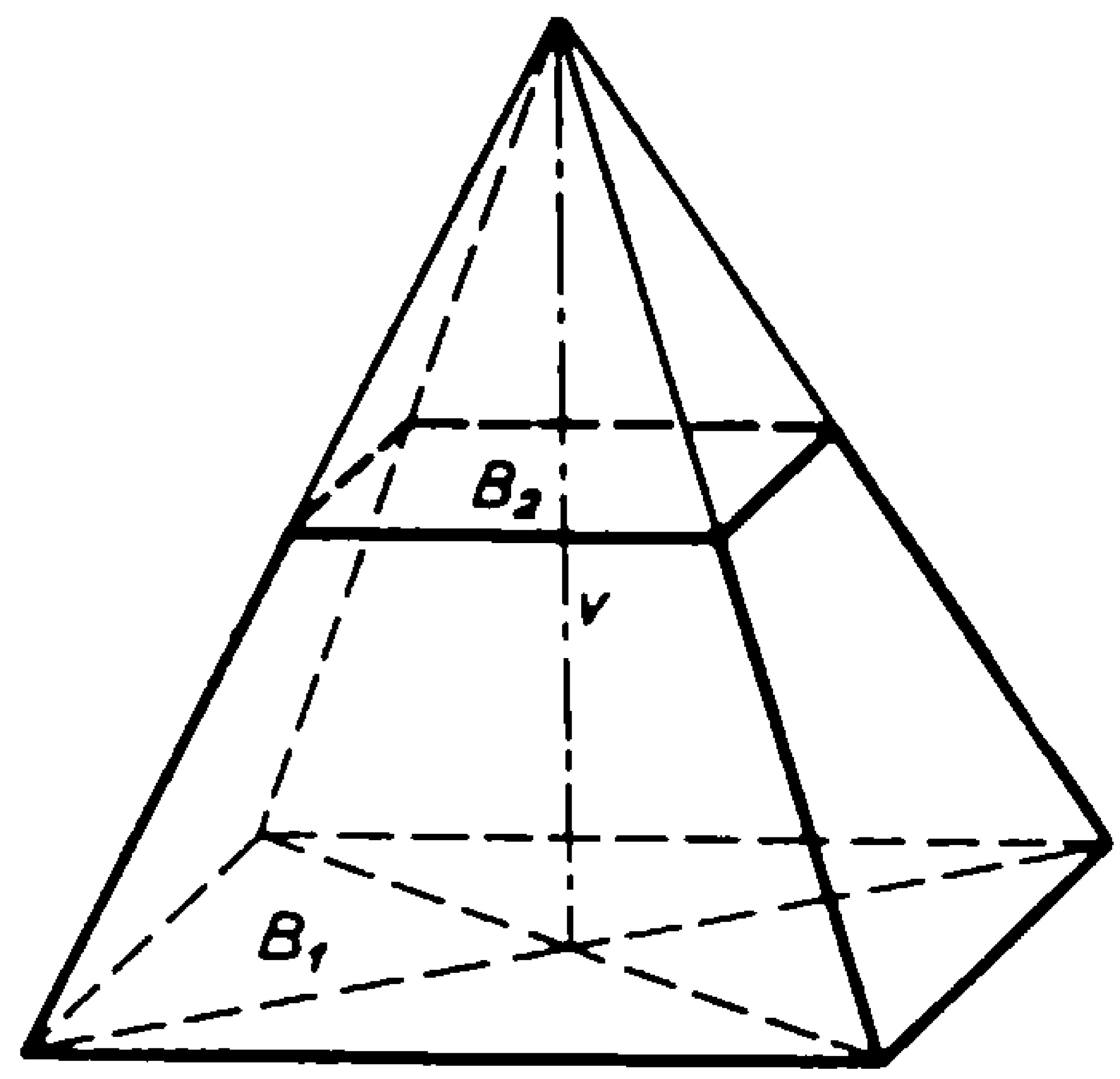
2. Uspravna piramida (svi su pobočni bridovi jednaki, nožište visine pada u središte kružnice opisane oko osnovke) (sl. 25).

$$P = \frac{o \cdot u}{2}$$

(o — opseg osnovke, u — visina pobočke).



Sl. 25



Sl. 26

3. Krnja piramida (sl. 26)

$$O = B_1 + B_2 + P; \qquad V = \frac{v}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2).$$

5. Pravilni tetraedar (omeđen je sa 4 sukladna istostranična trokuta):

$$O = a^2\sqrt{3}; \qquad V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}.$$

c) **Valjak**

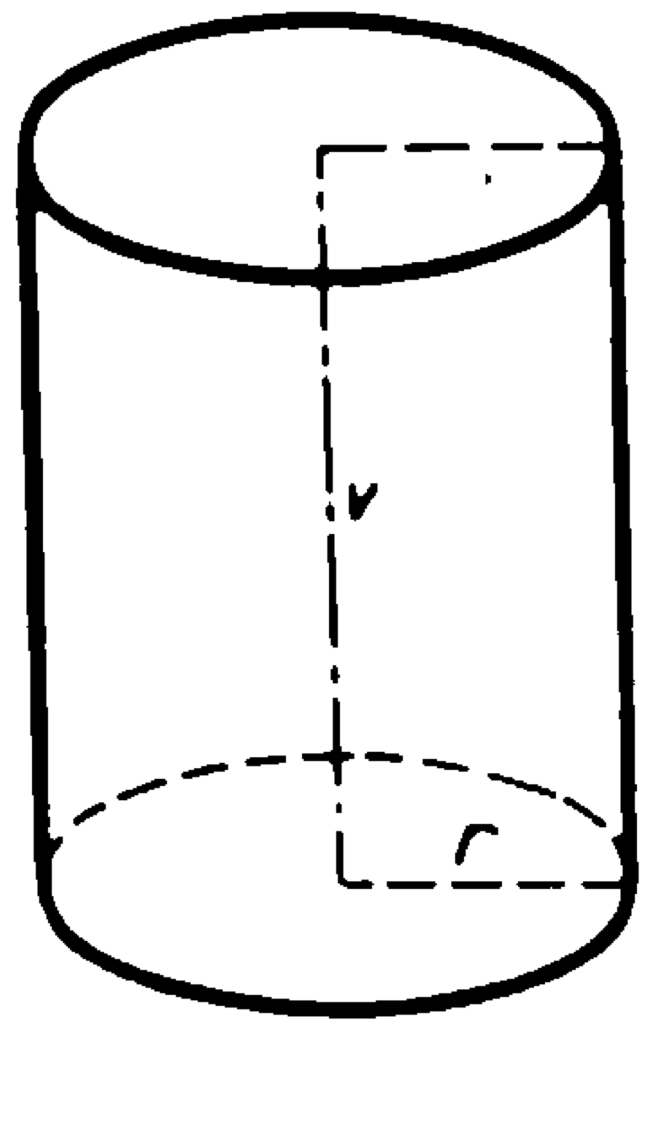
1. Uspravni i kosi valjak

$$V = r^2\pi v = \pi\frac{d^2}{4}v \qquad (r \text{ — polumjer, } d \text{ — promjer osnovke}).$$

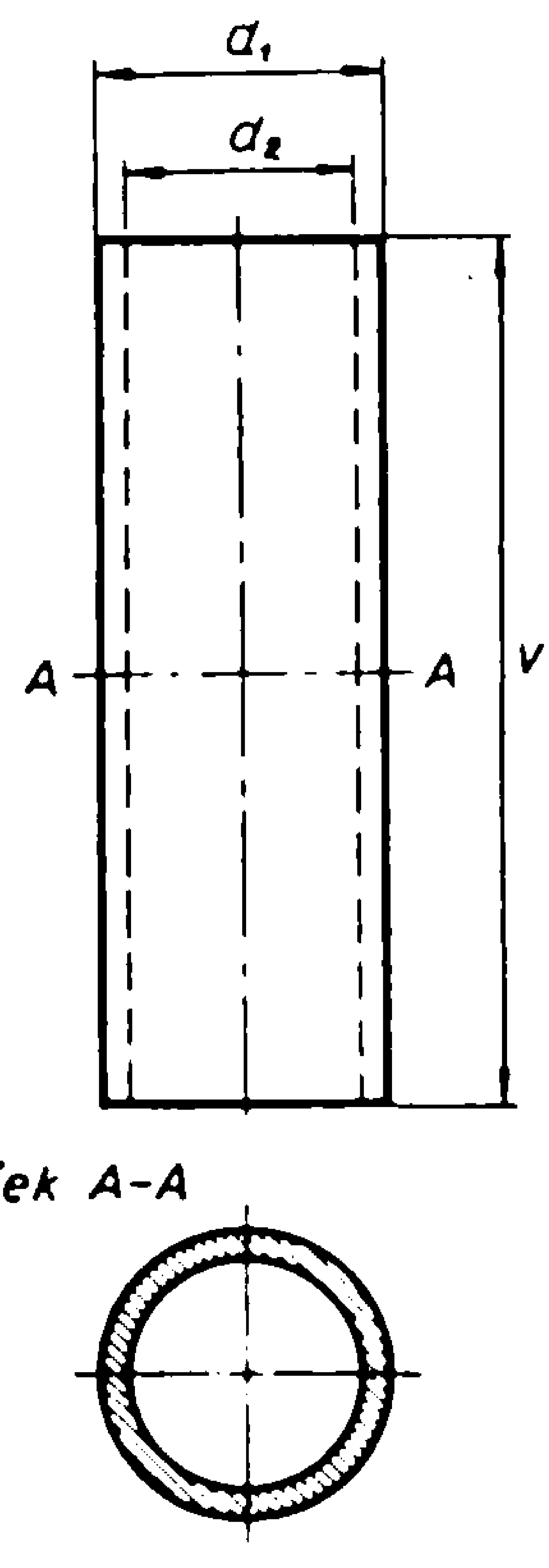
2. Uspravni valjak (sl. 27)

$$P = 2\,r\pi v = \pi d v;$$

$$O = 2r\pi\,(r + v)$$



Sl. 27



Sl. 28

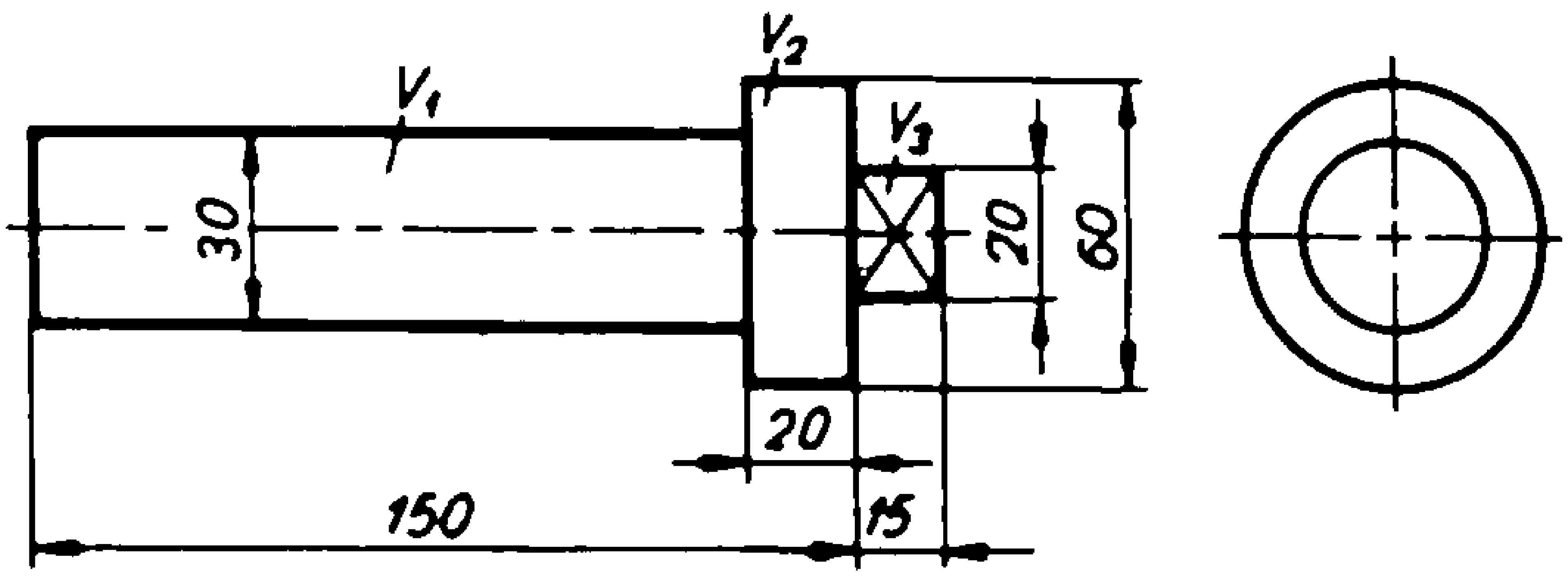
3. Valjkasta cijev (sl. 28)

$$V = \pi \frac{d_1^2}{4} v - \pi \frac{d_2^2}{4} v = \frac{\pi v}{4} (d_1^2 - d_2^2)$$

Primjer:

Kolika je težina čeličnog svornika (sl. 29), ako je specifična težina čelika $\gamma = 7{,}85$? Svornik se sastoji od dva valjka i jednog kvadratičnog stupića.

Težina $G = V \cdot \gamma$ = obujam puta spec. težina.



Sl. 29

Kako 1 cm^3 vode teži 1 g (čelika 7,85 g), 1 dm^3 (1 litra) vode — 1 kg (čelika 7,85 kg), a 1 m^3 vode — 1 tona (čelika 7,85 t), računat ćemo obujam V u dm^3, da dobijemo traženu težinu svornika G u kg. Prema tome sve dimenzije koje su na slici označene u mm dijelimo sa 100, da bismo dobili dm.

1. Obujam

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V_1 = \pi \frac{d_1^2}{4} v_1 = \pi \frac{0{,}3^2}{4} 1{,}3 = 0{,}092 \text{ dm}^3$$

$$V_2 = \pi \frac{d_2^2}{4} v_2 = \pi \frac{0{,}5^2}{4} 0{,}2 = 0{,}039 \text{ ,,}$$

$$\underline{V_3 = B \cdot v_3 = 0{,}2^2 \cdot 0{,}15 = 0{,}006 \text{ ,,}}$$

$$V = \qquad = 0{,}137 \text{ dm}^3$$

2. Težina

$$G = V \cdot \gamma = 0{,}137 \cdot 7{,}85 = 1{,}075 \text{ kg} \doteq \underline{1{,}1 \text{ kg}}$$

d) Stožac

1. Uspravni i kosi stožac

$$V = \frac{r^2 \pi v}{3}.$$

2. Uspravni stožac (sl. 30).

$$P = r\pi s \qquad (s = \text{stranica stošca} = \sqrt{r^2 + v^2})$$

$$O = r\pi (r + s).$$

3. Krnji stožac

a) Uspravni i kosi krnji stožac

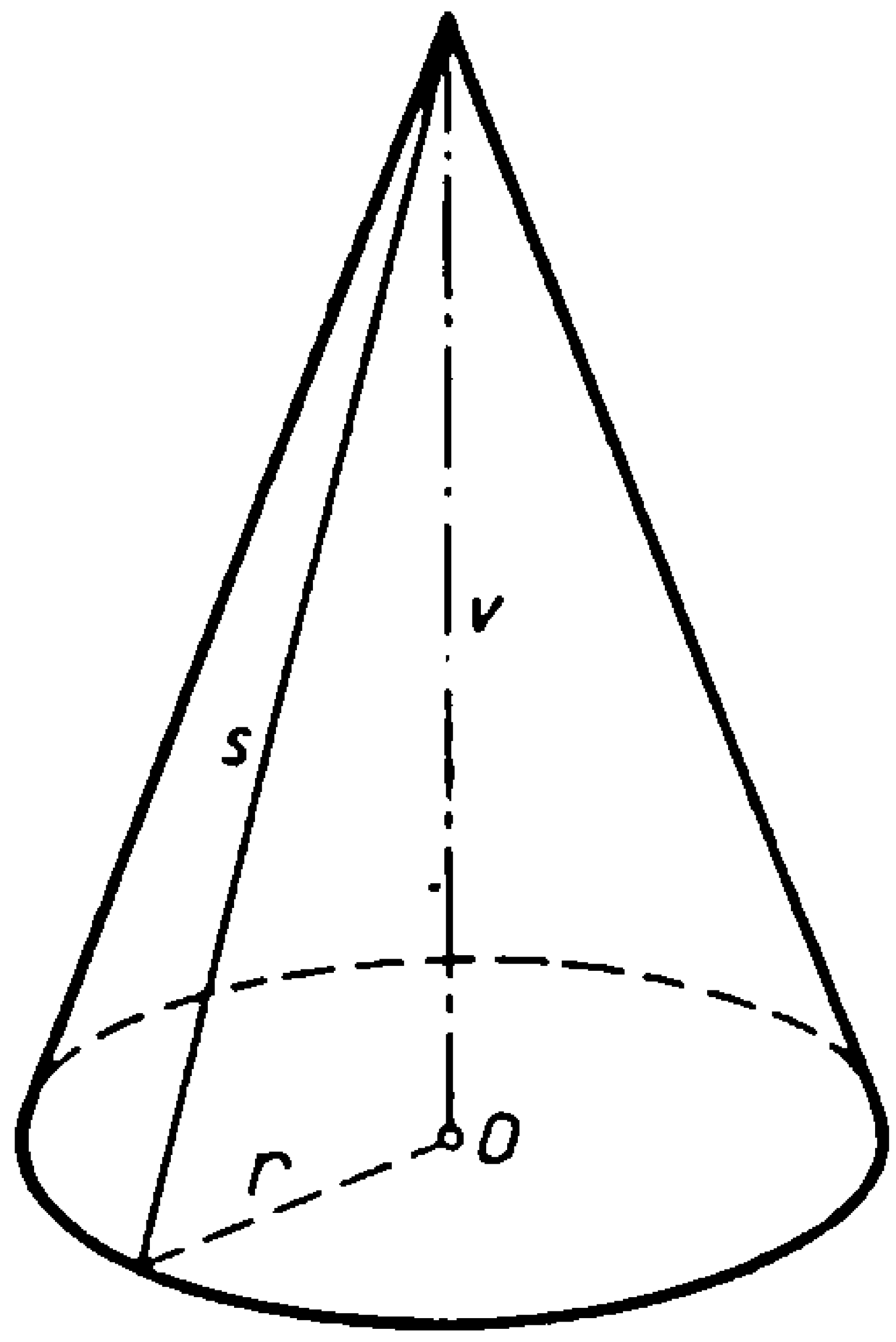
$$V = \frac{v}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2) = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{\pi v}{12}(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$$

(d_1 i d_2 — promjeri osnovaka).

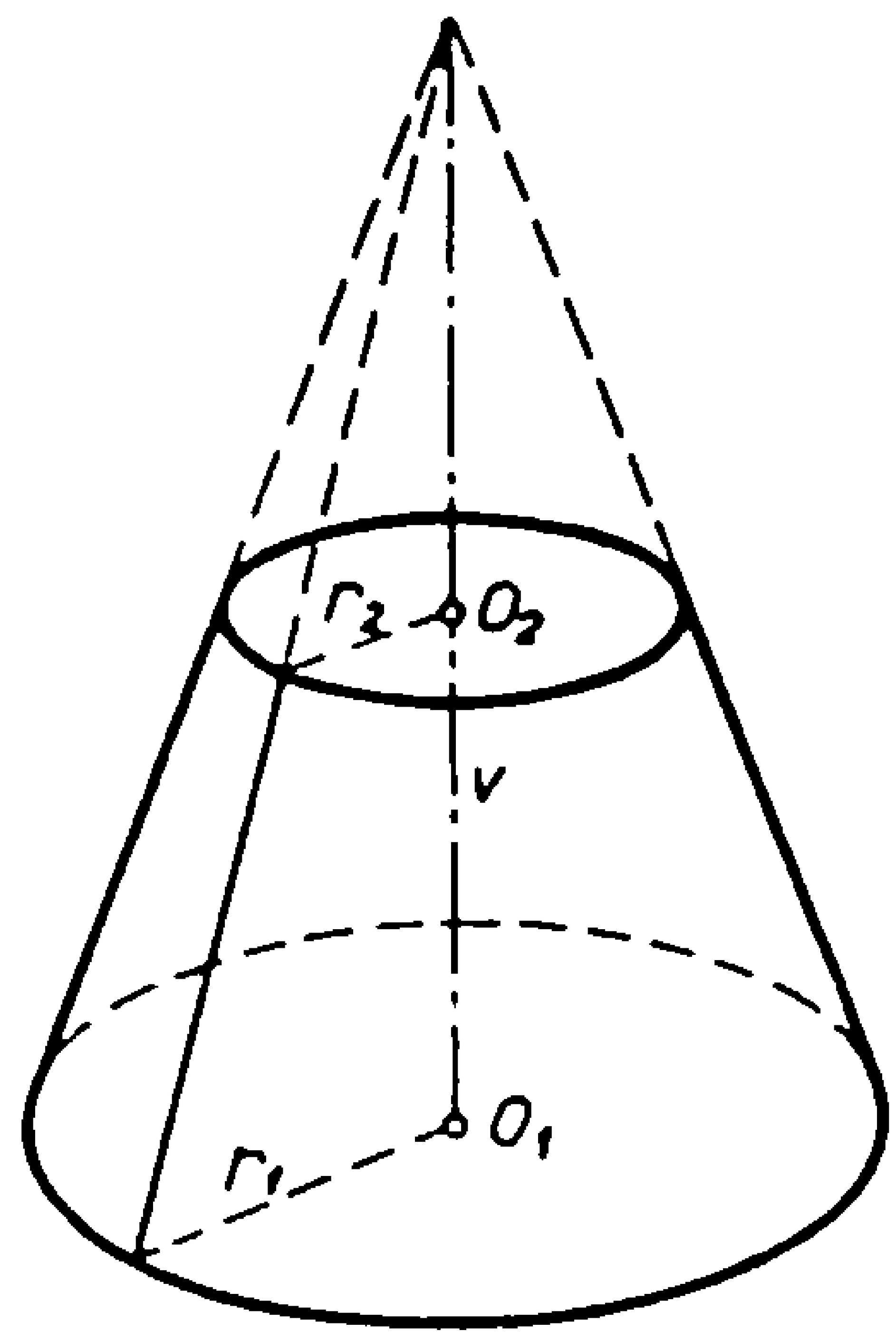
b) Uspravni krnji stožac (sl. 31)

$$P = (r_1 + r_2)\,\pi s$$

$$O = \pi\,[r_1^2 + r_2^2 + (r_1 + r_2)\,s].$$



Sl. 30



Sl. 31

e) Približno izračunavanje obujma krnje piramide i krnjeg stošca

Za mnoge tehničke svrhe posve je dovoljno približno izračunavanje obujma. Tako se može obujam krnje piramide ili stošca računati po približnoj formuli:

$$V \doteq B_{sr} \cdot v, \qquad (a)$$

gdje je:

$$B_{sr} = \frac{B_1 + B_2}{2}.$$

Za krnji stožac može se uzeti da je $B_{sr} = \dfrac{\pi d^2_{sr}}{4} = \dfrac{\pi}{4}\,\dfrac{(d_1 + d_2)^2}{4} =$

$$= \frac{\pi}{16}\,(d_1 + d_2)^2.$$

Uvrštenje u (a) daje približnu formulu za obujam krnjeg stošca:

$$V \doteq \frac{\pi v}{16}\,(d_1 + d_2)^2. \qquad (b)$$

Primjer:

Neka se izračuna obujam vedra u l (sl. 32, gornji promjer vedra je 300 mm = = 3,0 dm dug, donji 220 mm = 2,2 dm, a visina je 260 mm = 2,6 dm duga).

1. Po tačnoj formuli $V = \frac{\pi \cdot v}{12}(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$ imamo:

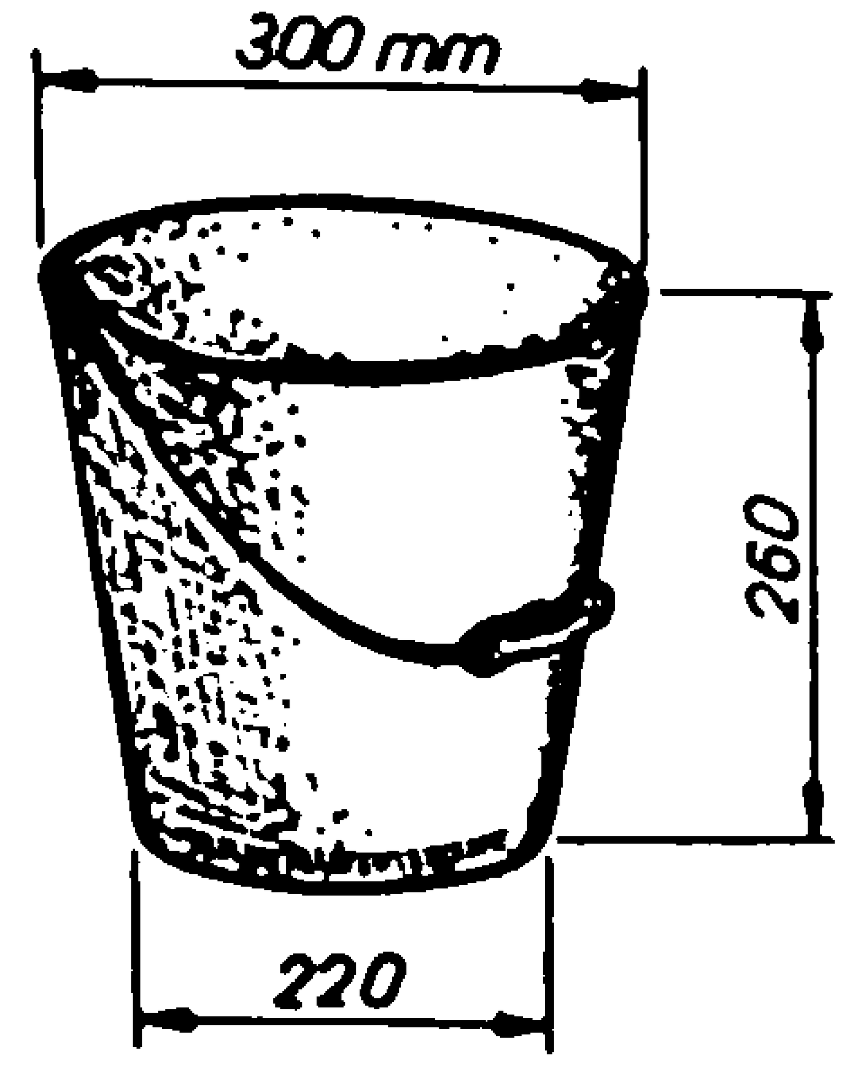
$$V = \frac{3,14 \cdot 2,6}{12}(2,2^2 + 2,2 \cdot 3,0 + 3,0^2) = \underline{13,92 \text{ dm}^3 \text{ (l)}}.$$

2. Po približnoj formuli (b):

$$V \doteq \frac{3,14 \cdot 2,6}{16}(2,2 + 3,0)^2 = \underline{13,82 \text{ dm}^3 \text{ (l)}}.$$

Približna vrijednost obujma ne razlikuje se bitno od tačne vrijednosti. To se vidi iz apsolutne pogreške:

Apsolutna pogreška = tačna vrijednost — približna vrijednost = 13,92 — 13,82 = 0,10 dm^3.



Sl. 32

Još bolje se vidi tačnost približnog rezultata iz relativne ili procentualne pogreške:

$$\text{Relativna pogreška} = \frac{\text{apsolutna pogreška}}{\text{tačna vrijednost}} = \frac{0,1}{13,92} = 0,007.$$

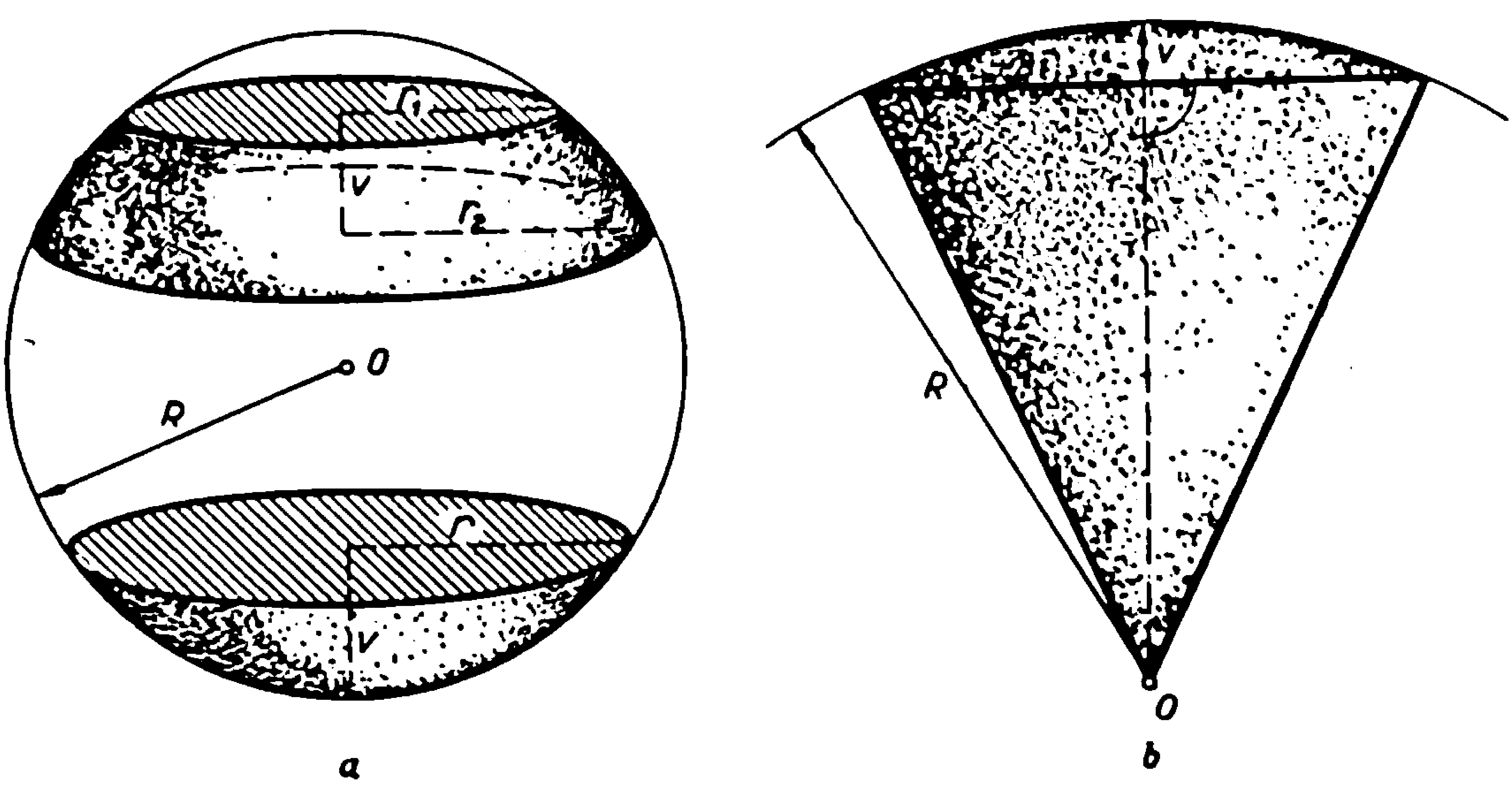
Procentualna pogreška = relativna pogreška · 100% = 0,007 · 100% = 0,7% = 7‰.

f) Kugla i njezini dijelovi

1. Kugla

$$O = 4\,R^2\pi = D^2\pi; \qquad V = \frac{4}{3}R^3\pi = \frac{1}{6}D^3\pi$$

R — polumjer, D — promjer kugle)



Sl. 33

2. Kuglin pojas (sloj) (sl. 33a)

$$P = 2\,R\,\pi\,v$$

$$V = \frac{\pi v}{6}\,(3\,r_1^2 + 3\,r_2^2 + v^2)$$

(r_1 i r_2 — polumjeri osnovnih krugova sloja).

3. Kuglina kapica (kalota, kuglin odsječak) (sl. 33a)

$$P = 2\,R\,\pi\,v = (r^2 + v^2)\,\pi$$

$$V = \frac{\pi v^2}{3}(3R - v) = \frac{\pi v}{6}(3r^2 + v^2)$$

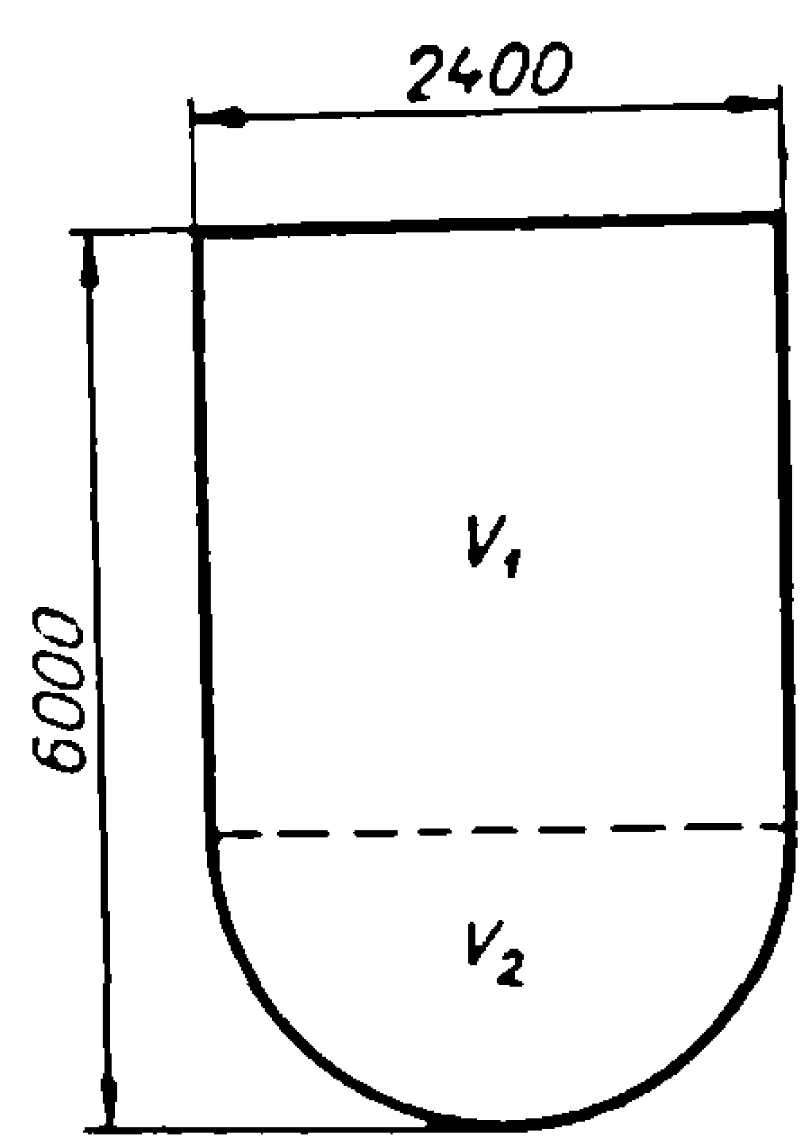
(r — polumjer osnovnog kruga kapice).

7. Kuglin isječak (sl. 33b)

$$V = \frac{2}{3}\,R^2\pi v.$$

Primjer:

Koliko m^3 vode zaprema spremište (sl. 34) i koliko m^2 lima treba za njegovu izvedbu?



Sl. 34

1. Zapremina:

$$V = V_1 + V_2$$

$$V_1 = \frac{\pi d^2}{4}\,v = \pi \cdot \frac{2{,}4^2}{4}\left(6{,}0 - \frac{2{,}4}{2}\right) = \pi \cdot \frac{2{,}4^2}{4} \cdot 4{,}8 =$$

$$= 21{,}7\ m^3$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\,\pi D^3 = \frac{\pi}{12} \cdot 2{,}4^3 = 3{,}6\ m^3$$

$$\underline{V = 25{,}3\ m^3.}$$

2. Potrebno je lima:

$$P = P_1 + P_2$$

$$P_1 = \pi d v = \pi \cdot 2{,}4\ (6{,}0 - 1{,}2) = \pi \cdot 2{,}4 \cdot 4{,}8 = 36{,}2\ m^2$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\,D^2\pi = \frac{1}{2} \cdot 2{,}4^2 \cdot \pi = 9{,}0\ m^2$$

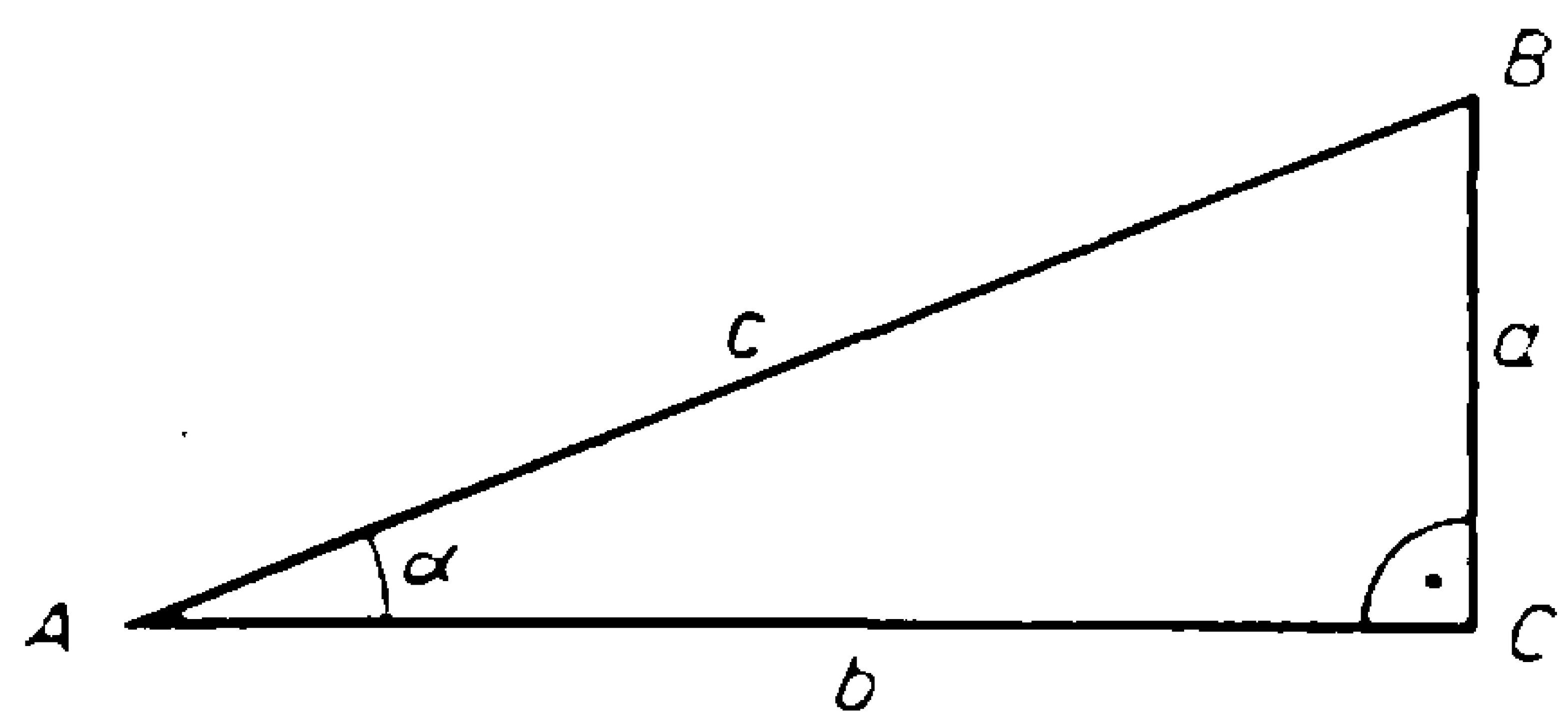
$$\underline{P = 45{,}2\ m^2.}$$

Računato je pomoću logaritamskog računala na 1 m^3, odnosno 1 m^2 tačno.

III. GONIOMETRIJA I TRIGONOMETRIJA

§ 1. DEFINICIJA GONIOMETRIJSKIH, TRIGONOMETRIJSKIH ILI CIRKULARNIH FUNKCIJA

U pravokutnom trokutu ABC s katetama a i b, hipotenuzom c i šiljatim kutom α zovu se omjeri:



Sl. 35

$$\frac{a}{c} = \frac{\text{kateta nasuprot kutu}}{\text{hipotenuza}} = \sin\alpha \qquad (\text{sinus } \alpha)$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\text{kateta uz kut}}{\text{hipotenuza}} = \cos\alpha \qquad (\text{kosinus } \alpha)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{kateta nasuprot kutu}}{\text{kateta uz kut}} = \operatorname{tg}\alpha \qquad (\text{tangens } \alpha)$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\text{kateta uz kut}}{\text{kateta nasuprot kutu}} = \operatorname{ctg}\alpha \qquad (\text{kotangens } \alpha)$$

$$\frac{c}{b} = \frac{\text{hipotenuza}}{\text{kateta uz kut}} = \sec\alpha \qquad (\text{sekans } \alpha)$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\text{hipotenuza}}{\text{kateta nasuprot kutu}} = \operatorname{cosec}\alpha \qquad (\text{kosekans } \alpha).$$

Iz gornjih definicija slijedi:

1) da su svi ti omjeri *funkcije samo kuta* α, jer njihova vrijednost ovisi jedino o tom kutu, a to je istaknuto u njihovom nazivu;

2) da su te funkcije **o m j e r i d u ž i n a**, dakle čisti (neimenovani) brojevi, pa je npr. $10\,m \cdot \sin 30^0 = 10\,m \cdot \frac{1}{2} = 5\,m$, dok je $10\,m \cdot \frac{1}{2}\,m = 5\,m^2$;

3) da je $\sin\alpha < 1$, $\cos\alpha < 1$, $\sec\alpha > 1$, $\operatorname{cosec}\alpha > 1$, jer je kateta manja od hipotenuze. (Znak $<$ znači »manji od«, znak $>$ znači »veći od«);

4) da $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ mogu primiti svaku konačnu vrijednost od 0 do ma kako velikog broja, jer omjer kateta može biti kakavgod;

5) da je $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$.

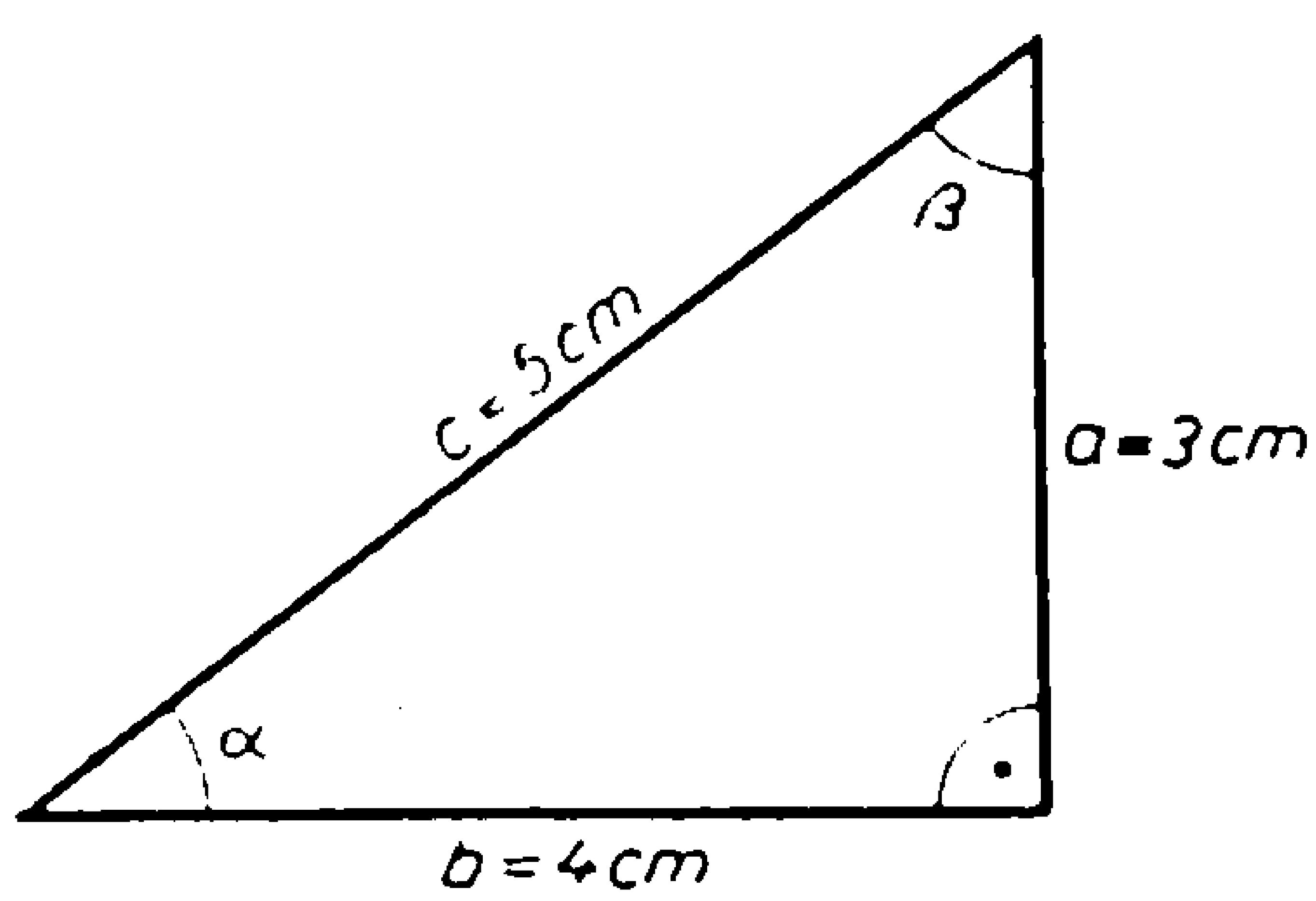
Primjeri:

1) Zadan je pravokutan trokut kojemu su katete $a = 3$ cm, $b = 4$ cm. Neka se izračunaju vrijednosti svih goniometrijskih funkcija kutova α i β toga trokuta.

Po Pitagorinu poučku:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ cm}.$$

Po definiciji goniometrijskih funkcija:



Sl. 36

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6 \qquad \sin\beta = \frac{4}{5} = 0{,}8$$
$$\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8 \qquad \cos\beta = \frac{3}{5} = 0{,}6$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75 \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3} = 1{,}33$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3} = 1{,}33 \qquad \operatorname{ctg}\beta = \frac{3}{4} = 0{,}75$$
$$\sec\alpha = \frac{5}{4} = 1{,}25 \qquad \sec\beta = \frac{5}{3} = 1{,}67$$
$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{5}{3} = 1{,}67 \qquad \operatorname{cosec}\beta = \frac{5}{4} = 1{,}25.$$

Vidimo da je $\sin\alpha = \cos\beta$
$\cos\alpha = \sin\beta$
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$ itd.

a kako su α i β **k o m p l e m e n t n i** kutovi, jer je njihov zbroj $\alpha + \beta = 90^0$, zaključujemo:

ako su dva kuta komplementna, funkcija jednog kuta jednaka je kofunkciji drugog kuta.

Npr.:

$$\sin 30^0 = \cos 60^0$$
$$\operatorname{ctg} 45^0 = \operatorname{tg} 45^0$$
$$\cos(45^0 - \alpha) = \sin[90 - (45^0 - \alpha)] = \sin(45^0 + \alpha).$$

Primjetimo da su dva kuta **s u p l e m e n t n a** ako je njihov zbroj 180^0.

2) Neka se izračunaju vrijednosti goniometrijskih funkcija:

a) kuta $\alpha = 45^0$.

Iz pravokutnog istokračnog trokuta kateta a slijedi:

1. po Pitagorinu poučku:

$$c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

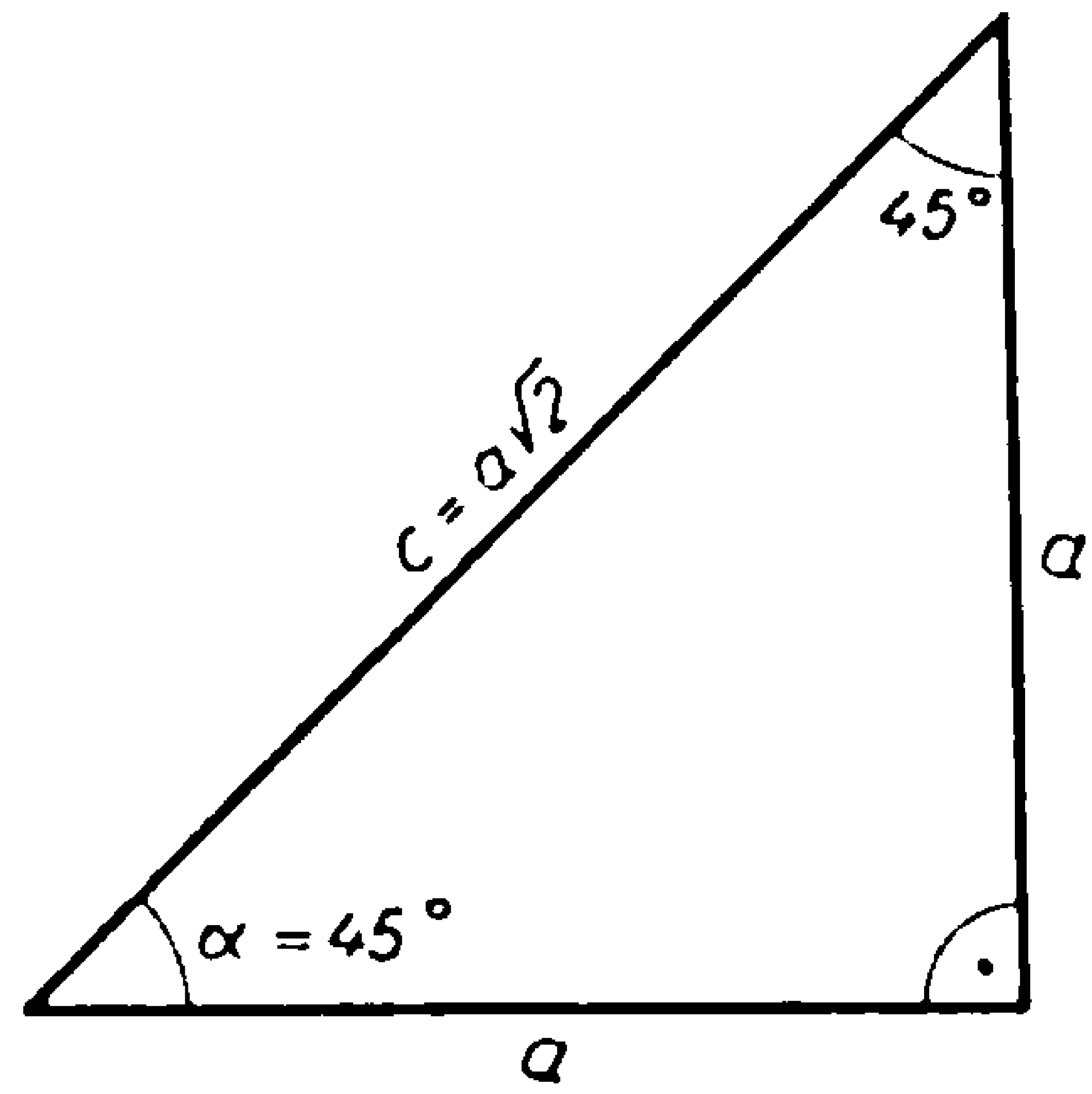
2. po definiciji goniometrijskih funkcija

$$\sin 45^0 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^0 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^0 = \frac{a}{a} = 1$$

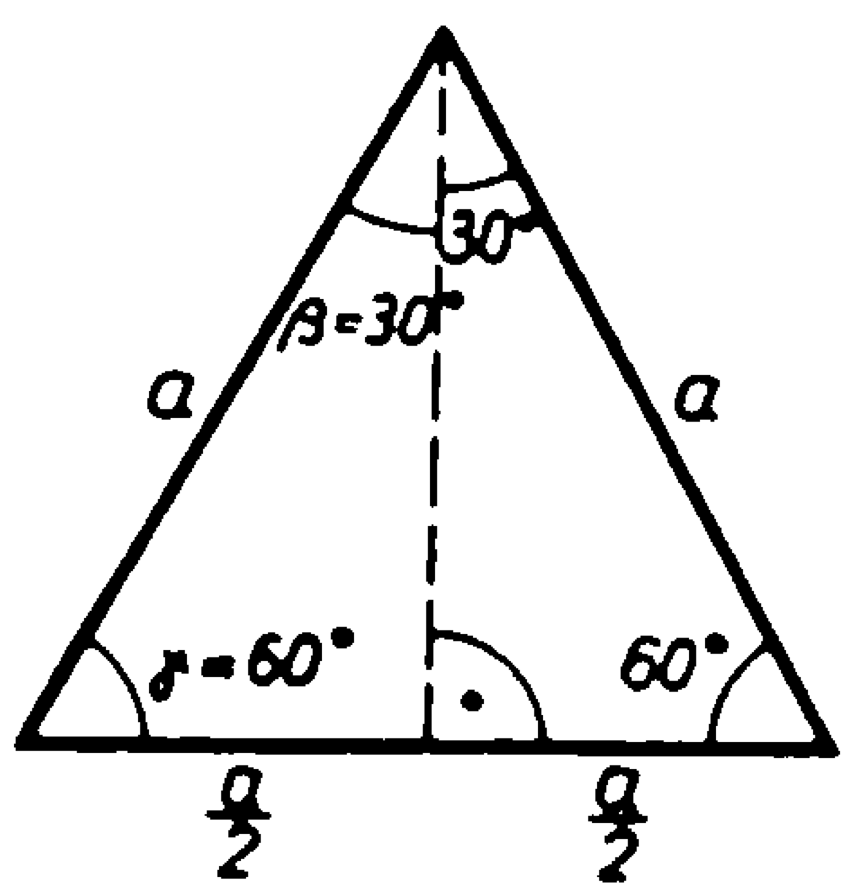
$$\operatorname{ctg} 45^0 = \frac{a}{a} = 1.$$



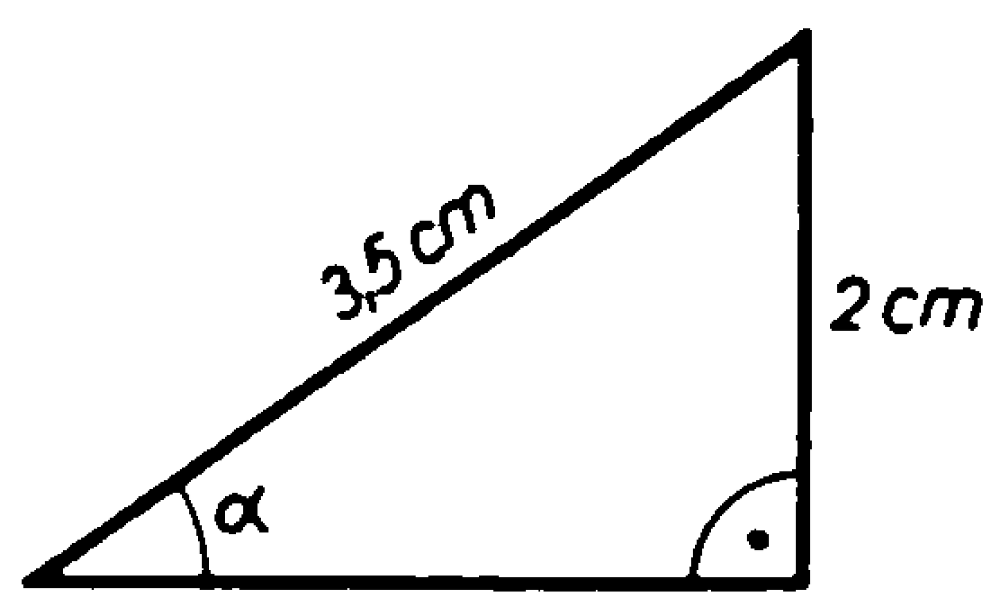
Sl. 37

b) kutova $\beta = 30^0$ i $\gamma = 60^0$.

Visina v istostraničnog trokuta stranica a dijeli taj trokut u dva pravokutna trokuta sa šiljatim kutovima $\beta = 30^0$ i $\gamma = 60^0$. Iz lijevog (ili desnog) trokuta slijedi prema sl. 38.:



Sl. 38



Sl. 39

1. $$v = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 60^0 = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^0 = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^0 = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} 60^0 = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2. $$\sin 30^0 = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^0 = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^0 = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

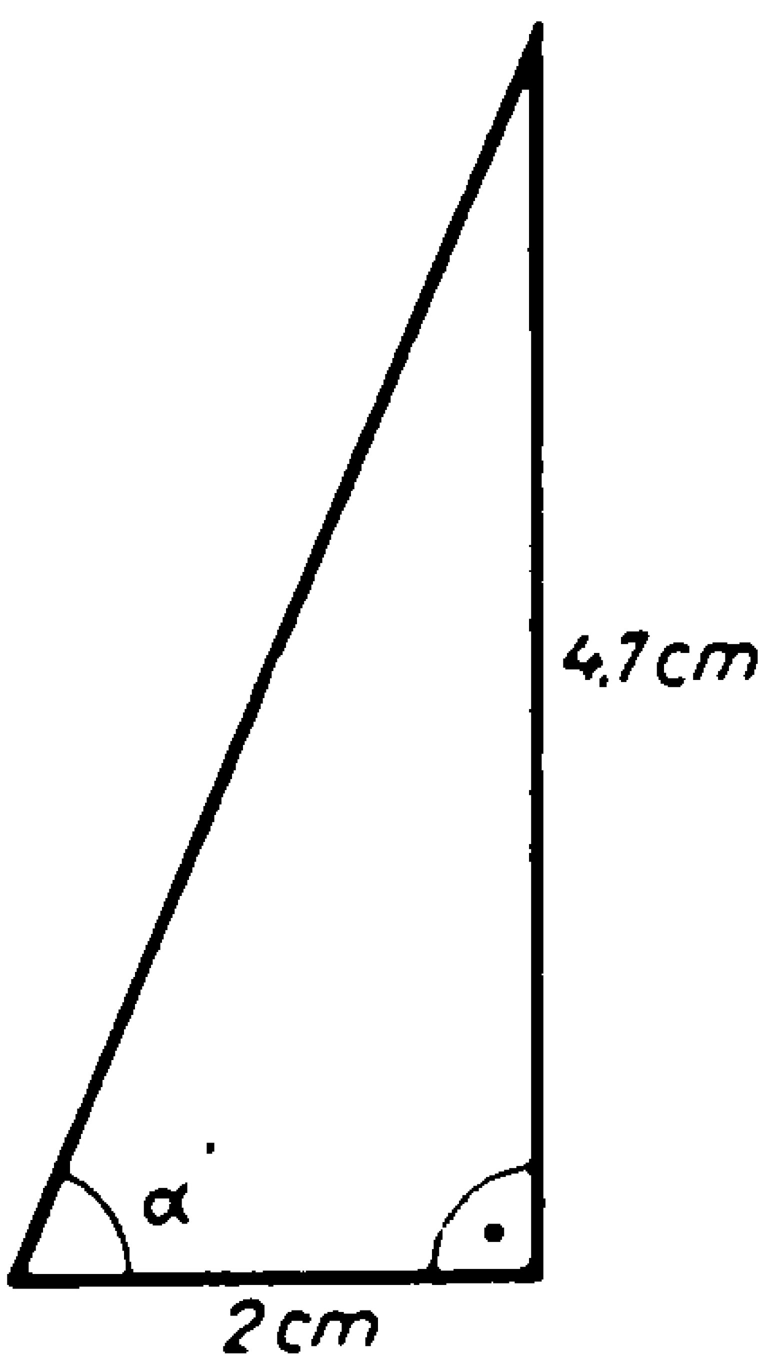
$$\operatorname{ctg} 30^0 = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}.$$

Opet vidimo da je

$\sin 30° = \cos 60°$

$\cos 30° = \sin 60°$ itd.

3) Neka se konstruiraju kutovi α, ako je:



Sl. 40

a) $\sin \alpha = \frac{4}{7}$.

$$\sin \alpha = \frac{\text{kateta nasuprot } \alpha}{\text{hipotenuza}} = \frac{4}{7} = \frac{4\ \text{km}}{7\ \text{km}} = \frac{4\ \text{m}}{7\ \text{m}} =$$

$$= \frac{4\ \text{cm}}{7\ \text{cm}} = \frac{2\ \text{cm}}{3{,}5\ \text{cm}}\ \text{itd.}$$

Za konstrukciju kuta α uzet ćemo omjer $\frac{2\ \text{cm}}{3{,}5\ \text{cm}}$ i narisat ćemo pravokutni trokut katete 2 cm i hipotenuze 3,5 cm. Nasuprot katete duge 2 cm leži traženi kut α (Vidi sl. 39).

b) $\operatorname{tg} \alpha = 2{,}35$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{kateta nasuprot } \alpha}{\text{kateta uz } \alpha} = 2{,}35 = \frac{235\ \text{cm}}{100\ \text{cm}} =$$

$$= \frac{47\ \text{cm}}{20\ \text{cm}} = \frac{4{,}7\ \text{cm}}{2\ \text{cm}}\ \text{(vidi sl. 40).}$$

§ 2. PROŠIRENJE DEFINICIJE GONIOMETRIJSKIH FUNKCIJA

PREDOČIVANJE GONIOMETRIJSKIH FUNKCIJA DUŽINAMA U JEDINIČNOJ KRUŽNICI

Opis slike 41:

Iz pravokutnih trokuta *OAB*, *OCD* i *OEF* u jediničnoj kružnici ($OC = OB = OE = 1$) slijedi:

$\sin \alpha_1 = \dfrac{BA}{OB} = BA$	$\operatorname{tg} \alpha_1 = \dfrac{CD}{OC} = CD$	$\sec \alpha_1 = \dfrac{OD}{OC} = OD$
$\cos \alpha_1 = \dfrac{OA}{OB} = OA$	$\operatorname{cotg} \alpha_1 = \dfrac{EF}{OE} = EF$	$\operatorname{cosec} \alpha_1 = \dfrac{OF}{OE} = OF$

tj. u jediničnoj kružnici predočene su goniometrijske funkcije šiljatog kuta α ovako:

1) $\sin \alpha_1$ dužinom okomice $\overline{BA}$ spuštene iz presjecišta B kraka OK_1 jedinične kružnice na vodoravni polumjer OC;

2) $\cos \alpha_1$ projekcijom $\overline{OA}$ polumjera OB na vodoravni polumjer OC;

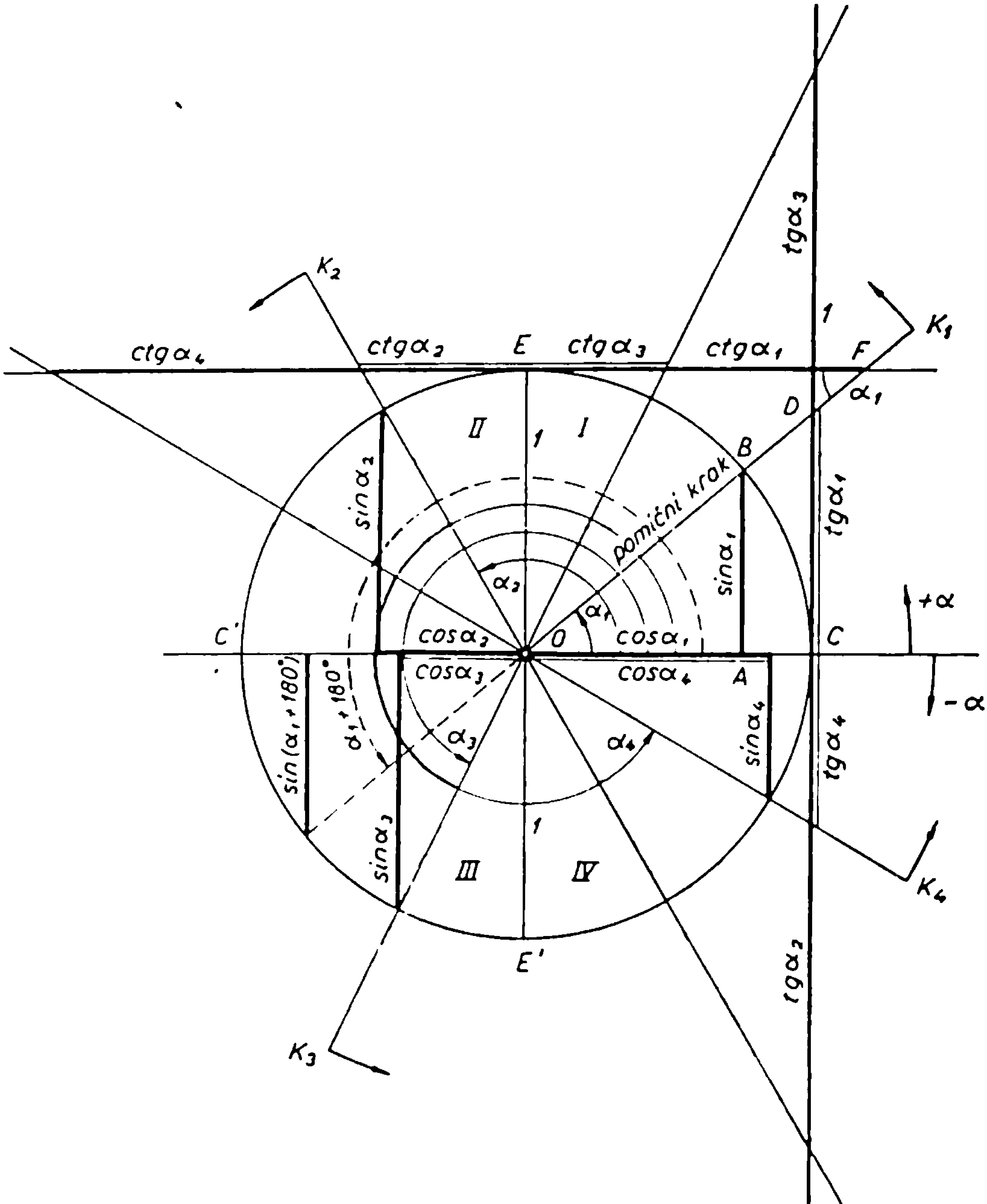
3) $\operatorname{tg} \alpha_1$ odsječkom $\overline{CD}$ tangente povučene na kružnicu u desnom kraju C vodoravnog polumjera OC;

4) $\operatorname{ctg} \alpha_1$ odsječkom $\overline{EF}$ tangente povučene na kružnicu u gornjem kraju E vertikalnog polumjera OE.

5) $\sec \alpha_1$ udaljenošću $\overline{OD}$ kraja D odsječka $CD = \operatorname{tg} \alpha$ od središta O kružnice.

6) $\operatorname{cosec} \alpha_1$ udaljenošću $\overline{OF}$ kraja F odsječka $EF = \operatorname{ctg} \alpha$ od središta O kružnice.

Kako se vidi iz slike 41, oba promjera, vodoravni CC' i vertikalni EE', dijele krug u četiri jednaka dijela, koji se zovu k v a d r a n t i. Ako je kut između 0^0 i 90^0, kaže se da je u prvom kvadrantu, između 90^0 i 180^0 u drugom, između 180^0 i 270^0 u trećem, a između 270^0 i 360^0 u četvrtom kvadrantu. Kvadranti slijede jedan za drugim u smjeru u kojem računamo kutove. U matematici je to smjer obratan kretanju kazaljke na satu (u geodeziji u smjeru kazaljke).



Sl. 41

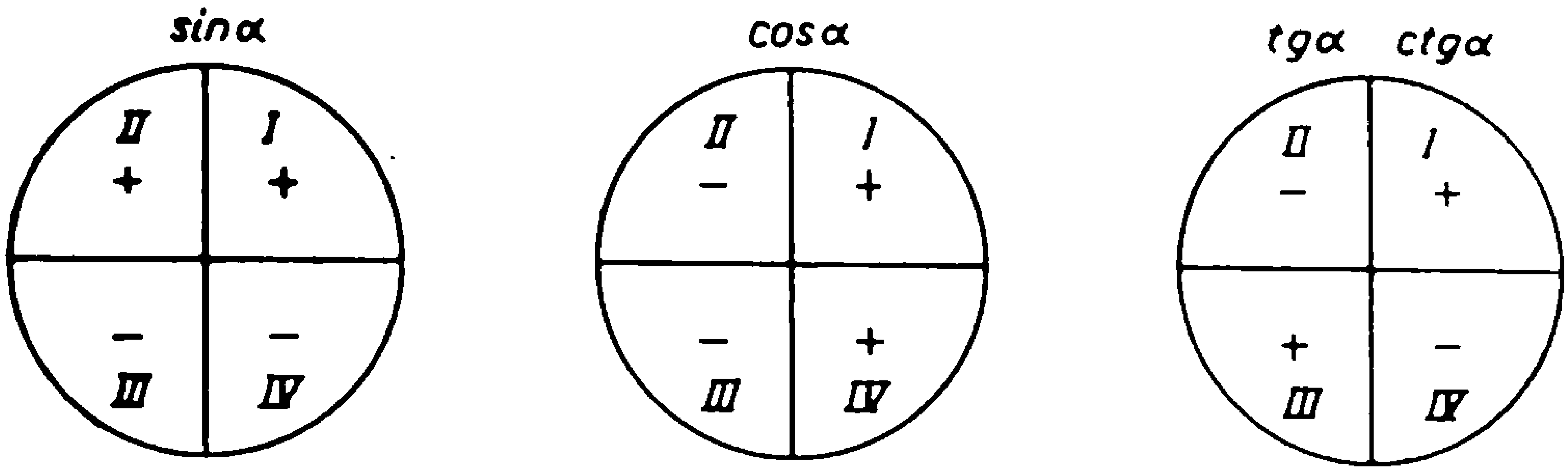
Vrti li se pomični krak OK_1 dalje, prelazeći iz I kvadranta (OK_1) u drugi (OK_2), treći (OK_3) i četvrti (OK_4) kvadrant, kut α prima neke vrijednosti α_2, α_3, α_4 kojima odgovaraju druge vrijednosti goniometrijskih funkcija (vidi sl. 41).

Što se tiče predznaka tih funkcija u različitim kvadrantima uzima se dogovorno da su:

1) sin α i tg α p o z i t i v n i, ako su dužine koje ih predočuju i z n a d vodoravnog promjera CC', a n e g a t i v n i, ako su te dužine i s p o d tog vodoravnog promjera.

2) $\cos\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ pozitivni su, ako dužine koje ih predočuju, leže desno od vertikalnog promjera EE', inače su negativni.

Prema tome su predznaci pojedinih funkcija u različitim kvadratima ovi:



Sl. 42

Povećamo li koji god kut, npr. α_1, za 180°, 360°, 540°, 720° itd. ponavljat će se vrijednosti tangensa i kotangensa već kod povećanja kuta za 180°, a vrijednosti sinusa i kosinusa tek kod povećanja kuta za 360°. Iz toga slijedi da su goniometrijske funkcije periodske funkcije, pri čemu sinus i kosinus imaju najmanji period $P = 360^0$, a tangens i kotangens $P = 180^0$ (vidi sl. 41).

Npr.:

$\sin 375^0 = \sin(360^0 + 15^0) = \sin 15^0$

$\cos 770^0 = \cos(2 \cdot 360^0 + 50^0) = \cos 50^0$

$\operatorname{tg} 200^0 = \operatorname{tg}(180^0 + 20^0) = \operatorname{tg} 20^0$

$\operatorname{ctg} 610^0 = \operatorname{ctg}(3 \cdot 180^0 + 70^0) = \operatorname{ctg} 70^0$

$\sin(360^0 + 30^0) = \sin 30^0 = 1/2$

$\cos(2 \cdot 360^0 + 45^0(= \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{tg}(180^0 + 60^0) = \operatorname{tg} 60^0 = \sqrt{3}$

$\operatorname{ctg}(5 \cdot 180^0 + 45^0) = \operatorname{ctg} 45^0 = 1$

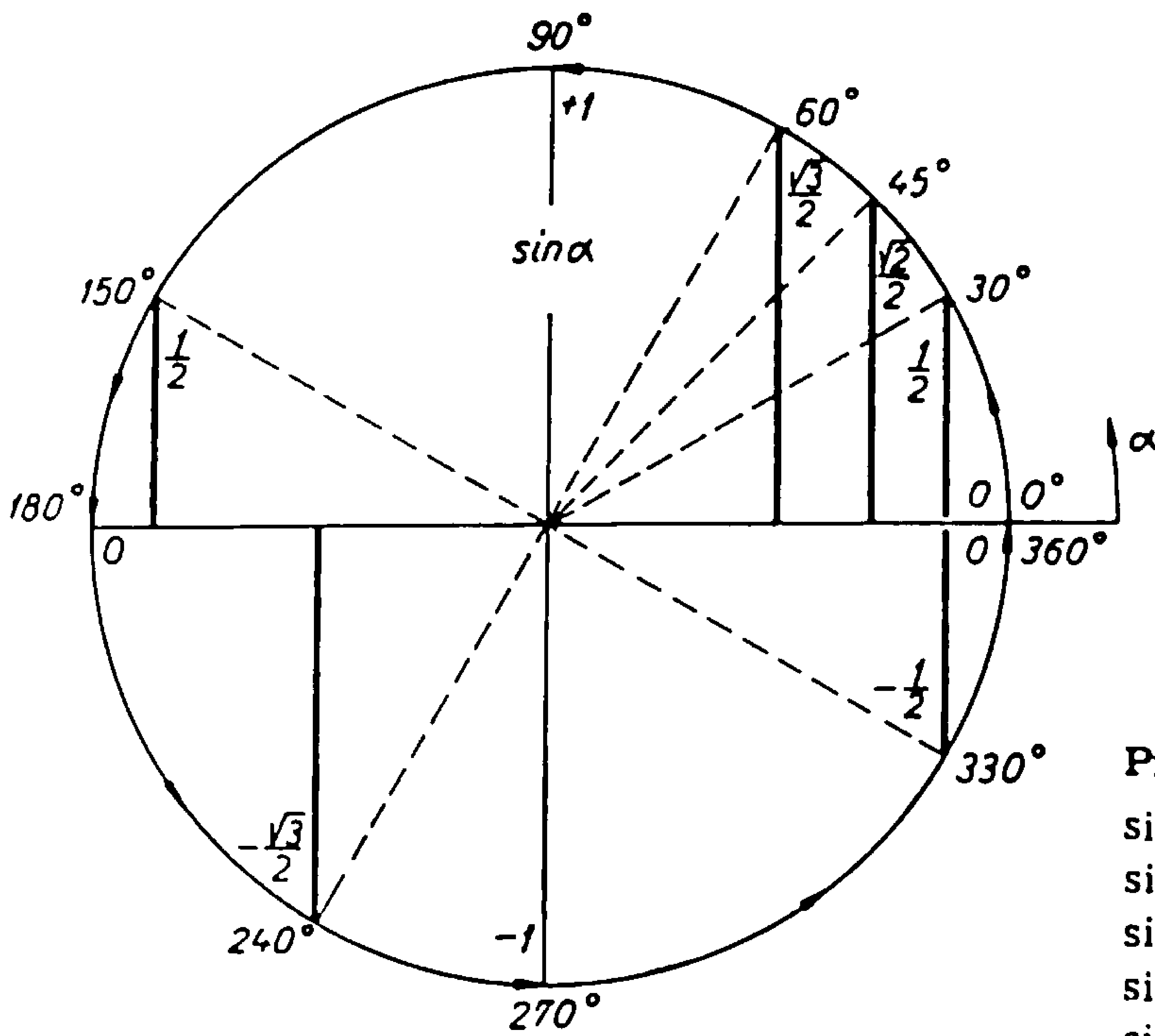
NEKE VRIJEDNOSTI GONIOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Na slici 41 mogu se jasno razabrati vrijednosti goniometrijskih funkcija za kutove 0°, 90°, 180°, 270° i 360°. Te vrijednosti navedene su u tablici koja slijedi, u nju su uključene i vrijednosti funkcija za kutove 45°, 30°, 60°, koje se dobivaju iz istokračnog pravokutnog trokuta i iz istostraničnog trokuta (vidi primjere 1. i 2. na strani 123).

Kut / Fkc.	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°	P	u I. kv.
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0	360°	raste
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1	360°	pada
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	180°	raste
ctg	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\mp\infty$	0	$-\infty$	180°	pada

Ostale vrijednosti goniometrijskih funkcija vade se iz tablice »Prirodne vrijednosti goniometrijskih funkcija« (vidi npr. tablicu II u Logaritamskim tablicama dr I. Majcena).

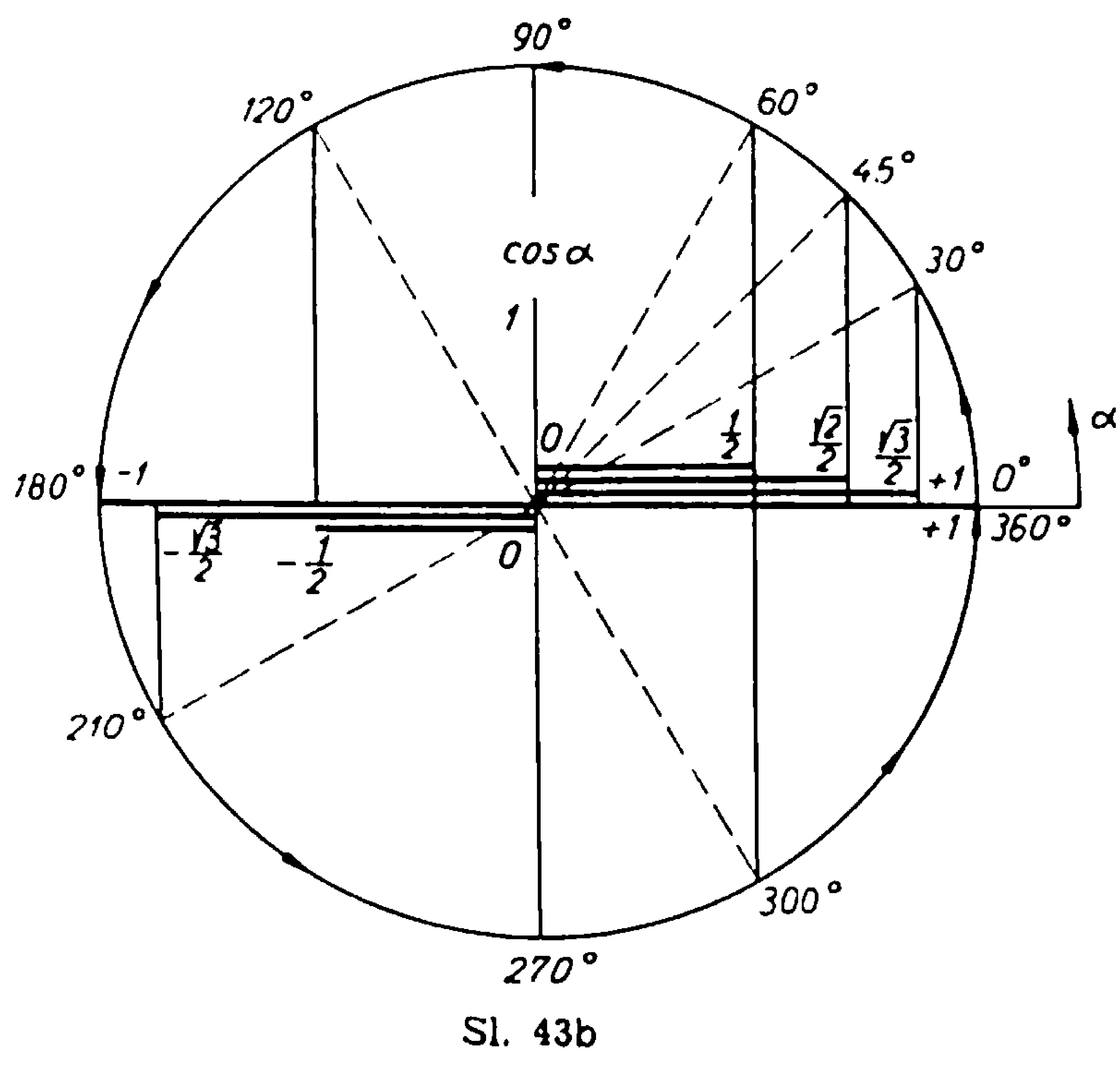
Praktički su od najveće važnosti osnovne vrijednosti goniometrijskih funkcija, jer se vrlo često upotrebljavaju. Te se vrijednosti najlakše pamte pomoću slika 43a, 43b, 44a i 44b.



Sl. 43a

Prema slici:

sin 0° = 0
sin 90° = 1
sin 180° = 0
sin 270° = —1
sin 360° = 0

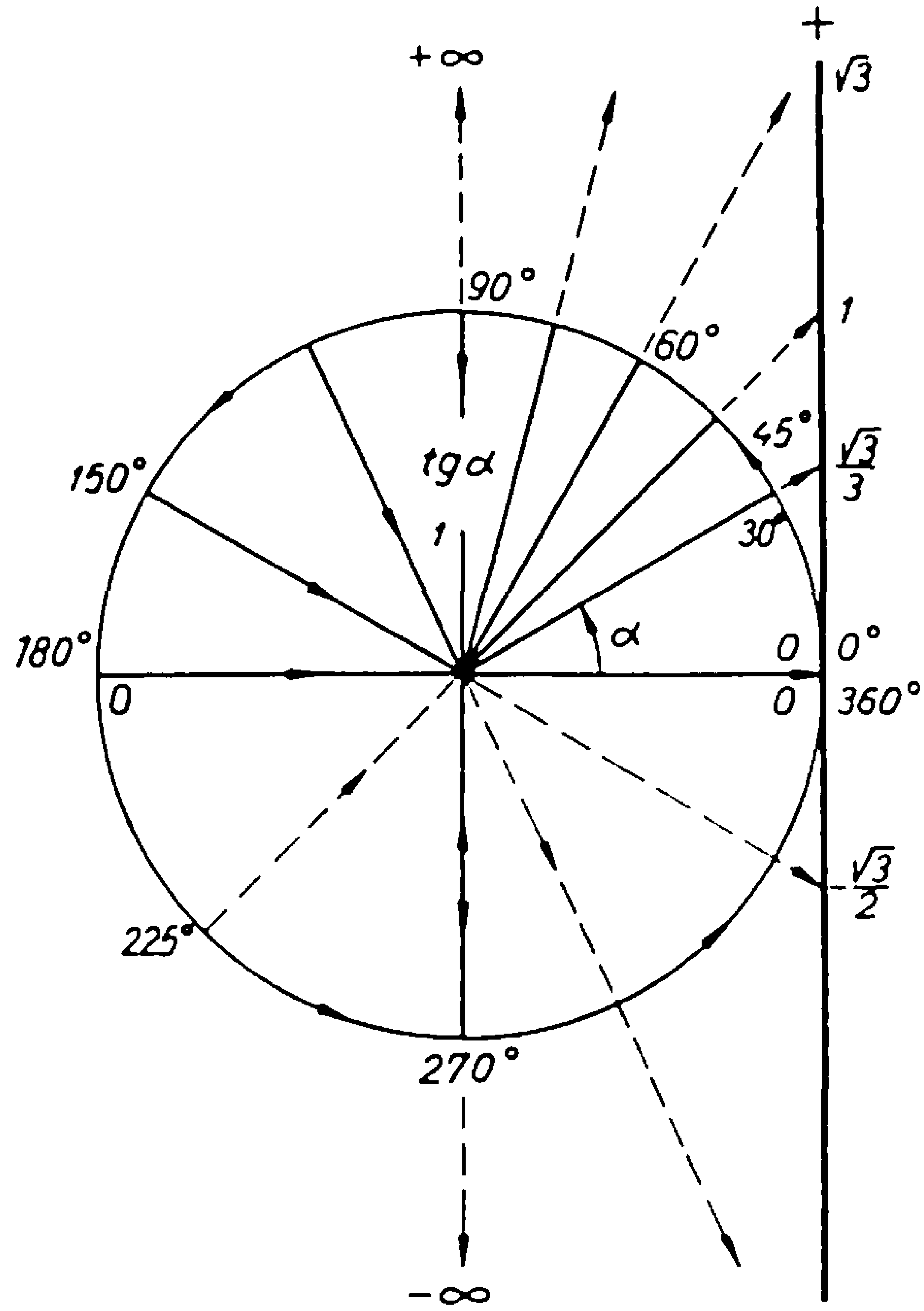


Sl. 43b

Prema slici:

cos 0° = 1
cos 90° = 0
cos 180° = —1
cos 270° = 0
cos 360° = 1

Vidimo da su funkcije bez »co«, tj. sinus i tangens pozitivni kad su iznad, odnosno negativni kad su ispod horizontalnog promjera, a funkcije s »co«, tj. cosinus i cotangens pozitivni su kad su nadesno, a negativni kad su nalijevo od vertikalnog promjera.



Prema slici:

tg $0^\circ = 0$

tg $45^\circ = 1$

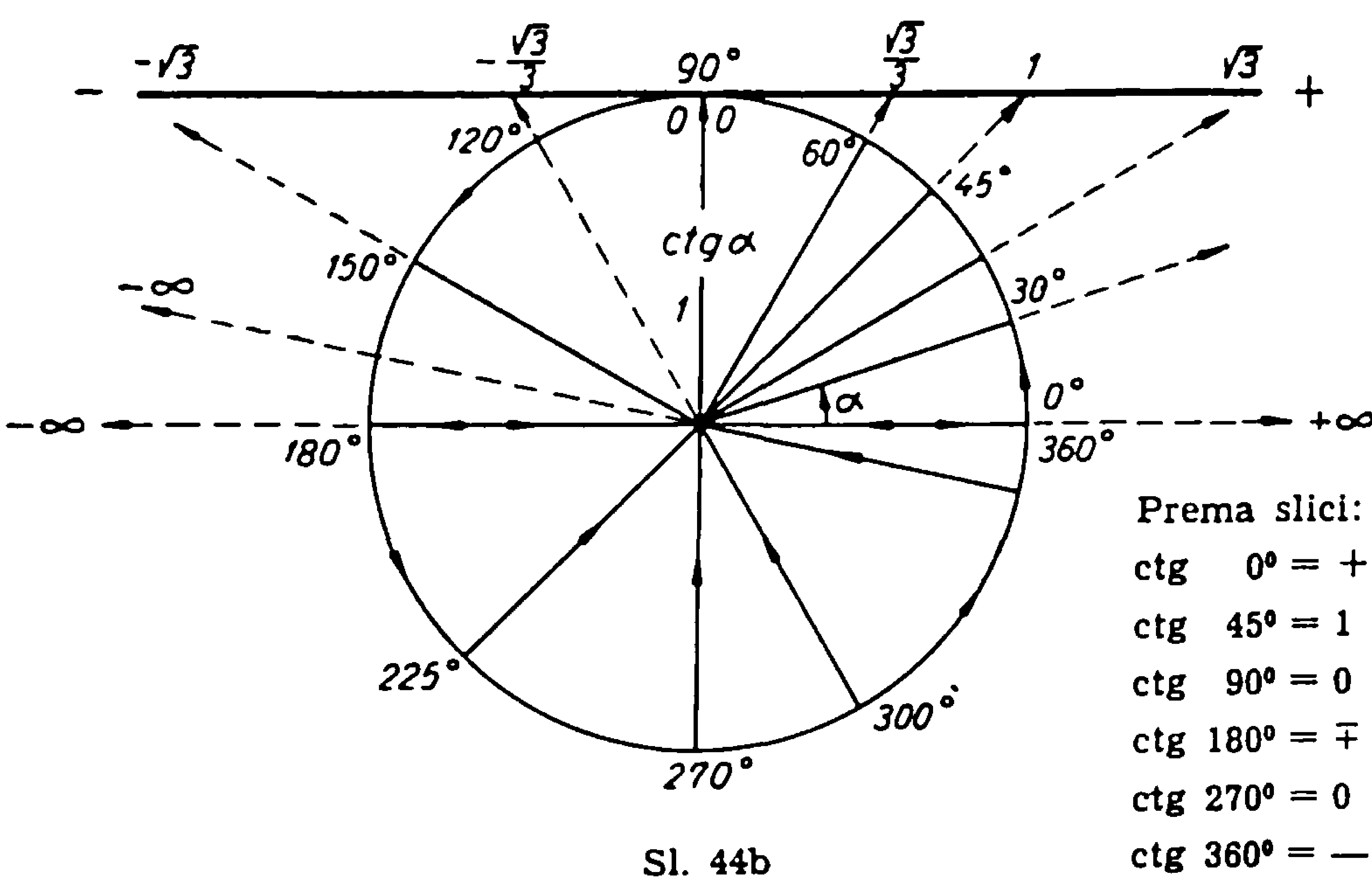
tg $90^\circ = \pm\infty$

tg $180^\circ = 0$

tg $270^\circ = \pm\infty$

tg $360^\circ = 0$

Sl. 44a



Prema slici:

ctg $0^\circ = +\infty$

ctg $45^\circ = 1$

ctg $90^\circ = 0$

ctg $180^\circ = \mp\infty$

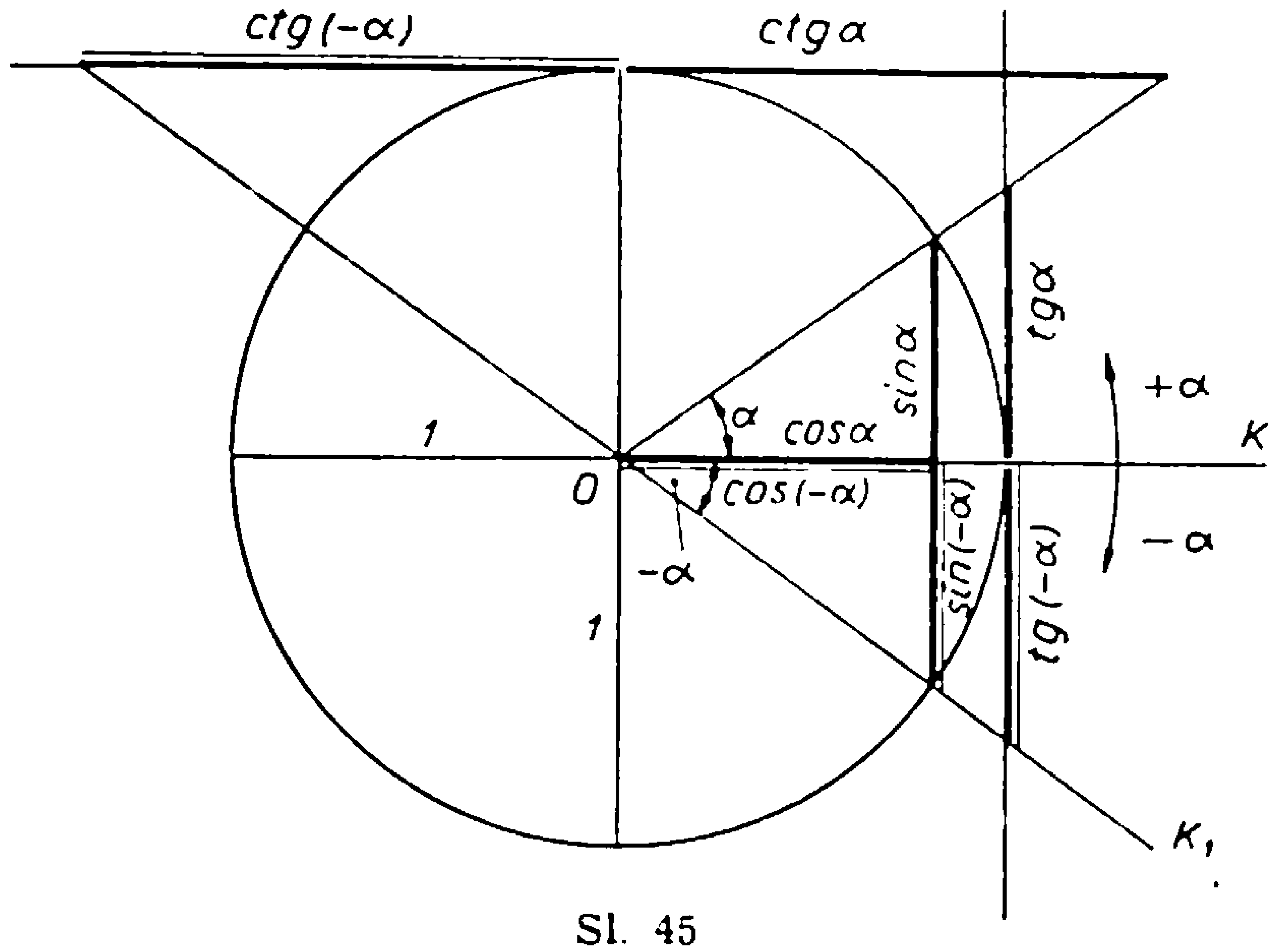
ctg $270^\circ = 0$

ctg $360^\circ = -\infty$

Sl. 44b

Oznaka $\pm\infty$, npr. kod funkcije tangens za $\alpha = 90^0$ znači samo to, da raste li kut α u prvom kvadrantu sve većma prema 90^0, tanges α raste k pozitivnim vrijednostima tako da može premašiti svaki, ma kako velik pozitivni broj, a umanjuje li se kut α u drugom kvadrantu i dolazi li sve bliže kutu 90^0, tg α raste k negativnim vrijednostima tako, da može premašiti svaki, ma kako velik negativni broj.

§ 3. NEGATIVNI KUTOVI



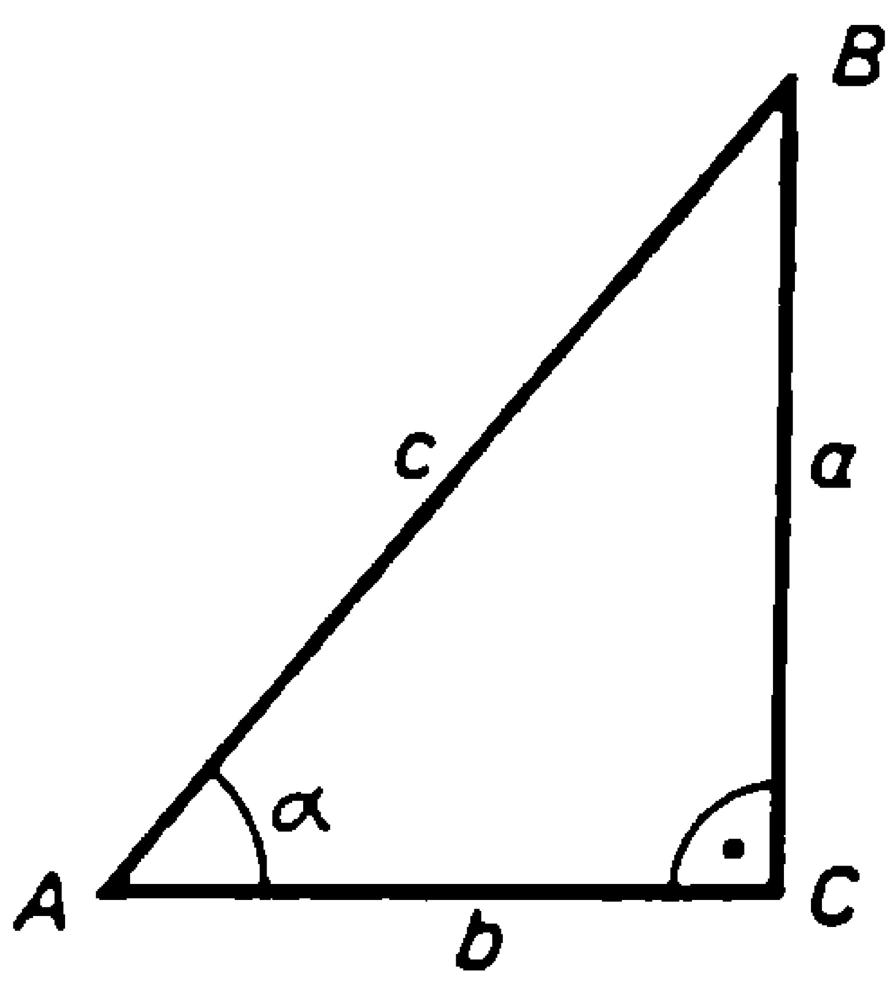
Sl. 45

Vrti li se pomični krak *OK* u smjeru okretanja kazaljke na satu, kutovi se smatraju negativnim (u geodeziji pozitivnim).

Prema slici 45 je:

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \qquad & \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \qquad & \operatorname{ctg}(-\alpha) &= -\operatorname{ctg}\alpha \end{aligned} \qquad (1)$$

§ 4. VEZA IZMEĐU GONIOMETRIJSKIH FUNKCIJA ISTOG KUTA α



Sl. 46

Iz pravokutnog trokuta ABC (slika 46) slijedi:

$$(K)\quad \left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{a}{c} \\ \cos\alpha &= \frac{b}{c} \end{aligned}\right\}\ \text{kvadrirajmo i zbrojimo}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

a kako je po Pitagorinu poučku $c^2 = a^2 + b^2$, dobiva se:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{2}$$

Odatle:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} \tag{2a}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}. \tag{2b}$$

Iz istog pravokutnog trokuta ABC (slika 46) imamo: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

a iz jednakosti (K) slijedi:

$$\left.\begin{aligned} a &= c\sin\alpha \\ b &= c\cos\alpha \end{aligned}\right\}\ \text{Uvrštenje daje}\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \tag{3}$$

Na sličan se način dobiva: $$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{4}$$

Umnožak formula (3) i (4) daje: $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$. (5)

Odatle:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} \tag{5a}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{5b}$$

Množenjem formula:

$$\sec\alpha = \frac{c}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Izlazi: $$\sec\alpha \cdot \cos\alpha = 1,$$

odatle: $$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}\cdot \qquad (6)$$

Na sličan način se dobiva: $$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}. \qquad (7)$$

Podijelimo li formulu (2) sa $\cos^2\alpha$, dobivamo:

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \text{ili s obzirom na (6):}$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha. \qquad (8)$$

Dioba formule (2) sa $\sin^2\alpha$ daje:

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad \text{ili s obzirom na (7)}$$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha. \qquad (9)$$

Te formule dobivamo i iz sl. 41:

$\Delta\, OAB$: $\quad \sin^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1 = 1; \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1}$ itd.

$\Delta\, OCD$: $\quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha_1 = \sec^2\alpha_1$; $\Delta\, OEF$: $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha_1 = \operatorname{cosec}^2\alpha_1$.

Pomoću tih formula može se svih šest goniometrijskih funkcija izraziti pomoću jedne funkcije kako pokazuje ova tablica:

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
$\sin\alpha$		$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sec\alpha}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}{\operatorname{cosec}\alpha}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$	$\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}$
$\sec\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\frac{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$		$\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
$\operatorname{cosec}\alpha$	$\frac{1}{\sin\alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$	$\frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	

Izvedi za vježbu sve te izraze!

§ 5. PRELAZ NA ŠILJATE KUTOVE

Kako se vidi iz slike 41 i tablice koja iza nje slijedi, svaka goniometrijska funkcija prima već u prvom kvadrantu sve vrijednosti koje uopće može primiti, *ako se ne obaziremo na predznak funkcije*. Na temelju toga možemo vrijednost svake goniometrijske funkcije kuta većeg od 90^0 izraziti pomoću njezine vrijednosti u prvom kvadrantu, uzevši dakako u obzir njen predznak.

Pravilo prelaza:

1. *Predznak.* Određuje se za pojedine funkcije u različitim kvadrantima prema shemi predznaka na sl. 42 (vidi također sl. 43a, 43b, 44a i 44b).

2. *Funkcija ili kofunkcija.* Ako se zadani kut može predočiti u obliku $(90^0 \pm \alpha^0)$ ili $(270^0 \pm \alpha^0)$, gdje je α^0 šiljati kut, *funkcija se mijenja u kofunkciju*, tj. sinus prelazi u kosinus, kosinus u sinus, tangens u kotangens i kotangens u tangens, a predoči li se zadani kut u obliku $(180^0 \pm \alpha^0)$ ili $(360^0 \pm \alpha^0)$, *funkcija ostaje ista.*

Prema tome:

$$\sin(90^0 \mp \alpha^0) = + \cos\alpha \qquad \sin(180^0 \mp \alpha^0) = \pm \sin\alpha$$
$$\cos(90^0 \mp \alpha^0) = \pm \sin\alpha \qquad \cos(180^0 \mp \alpha^0) = - \cos\alpha$$
$$\mathrm{tg}\,(90^0 \mp \alpha^0) = \pm \mathrm{ctg}\,\alpha \qquad \mathrm{tg}\,(180^0 \mp \alpha^0) = \mp \mathrm{tg}\,\alpha$$
$$\mathrm{ctg}\,(90^0 \mp \alpha^0) = \pm \mathrm{tg}\,\alpha \qquad \mathrm{ctg}\,(180^0 \mp \alpha^0) = \mp \mathrm{ctg}\,\alpha$$

$$\sin(270^0 \mp \alpha^0) = - \cos\alpha \qquad \sin(360^0 \mp \alpha^0) = \mp \sin\alpha$$
$$\cos(270^0 \mp \alpha^0) = \mp \sin\alpha \qquad \cos(360^0 \mp \alpha^0) = + \cos\alpha$$
$$\mathrm{tg}\,(270^0 \mp \alpha^0) = \pm \mathrm{ctg}\,\alpha \qquad \mathrm{tg}\,(360^0 \mp \alpha^0) = \mp \mathrm{tg}\,\alpha$$
$$\mathrm{ctg}\,(270^0 \mp \alpha^0) = \pm \mathrm{tg}\,\alpha \qquad \mathrm{ctg}\,(360^0 \mp \alpha^0) = \mp \mathrm{ctg}\,\alpha$$

Kako se vidi, navedeno pravilo vrijedi i za *komplementne kutove*, tj. za kutove α i β, čiji je zbroj $\alpha + \beta = 90^0$; tako je $\sin\alpha^0 = \sin(90^0 - \beta^0) = \cos\beta$, $\cos\alpha = \cos(90^0 - \beta^0) = \sin\beta$ itd.

Primjeri:

$$\sin 150^0 = \sin(90^0 + 60^0) = \cos 60^0 = 1/2$$
$$\cos 210^0 = \cos(180^0 + 30^0) = -\cos 30^0 = -\sqrt{3/2}$$
$$\mathrm{tg}\,330^0 = \mathrm{tg}\,(270^0 + 60^0) = -\mathrm{ctg}\,60^0 = -\sqrt{3/3}$$
$$\mathrm{ctg}\,135^0 = \mathrm{ctg}\,(90^0 + 45^0) = -\mathrm{tg}\,45^0 = -1$$
$$\sin 101^0 = \sin(90^0 + 11^0) = + \cos 11^0$$

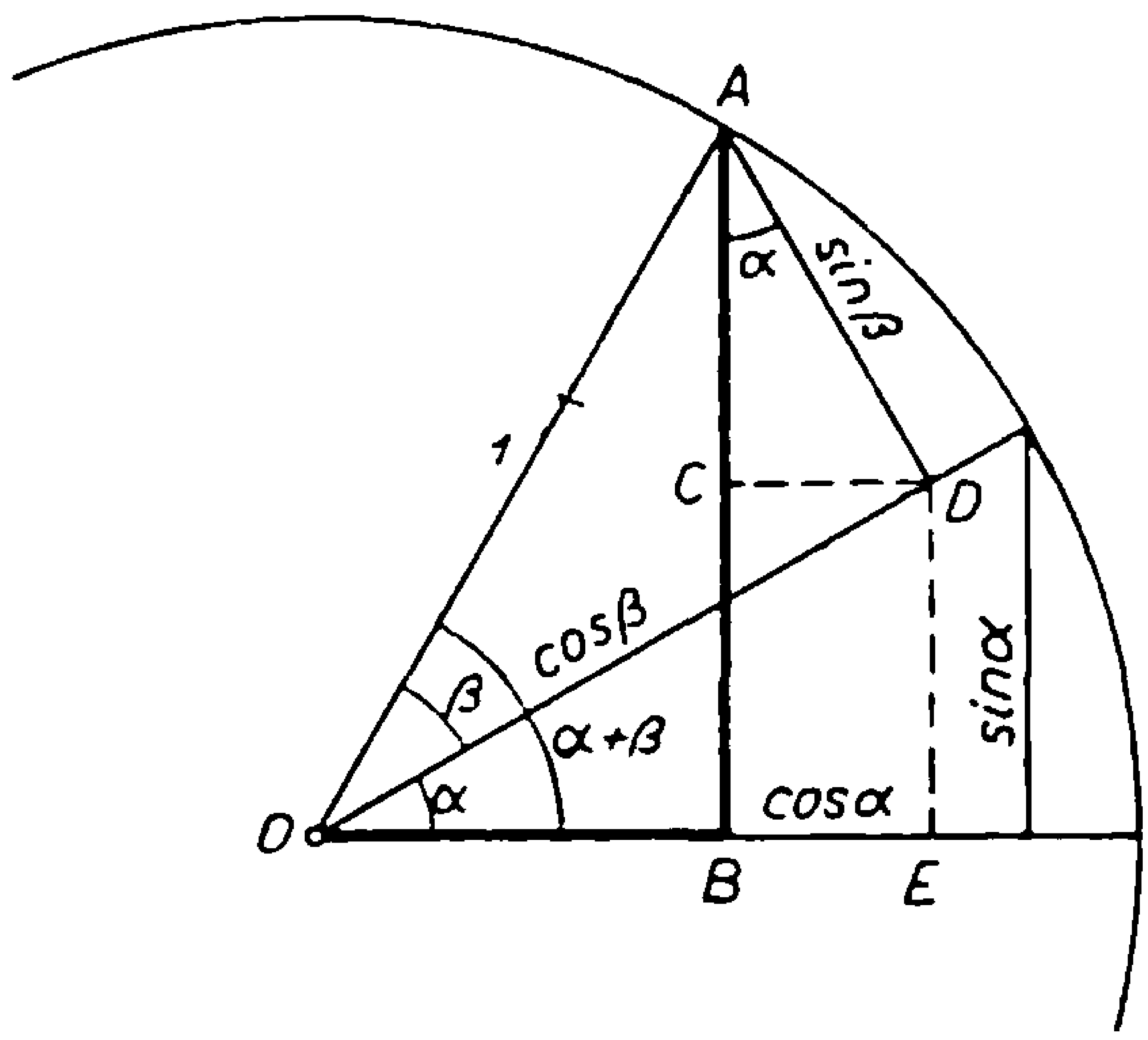
$$\cos 163^0 = \cos (180^0 - 17^0) = -\cos 17^0$$
$$\cos 216^0 = \cos (180^0 + 36^0) = -\cos 36^0$$
$$\mathrm{tg}\ 305^0 = \mathrm{tg}\ (270^0 + 35^0) = -\mathrm{ctg}\ 35^0$$
$$\mathrm{tg}\ 318^0 = \mathrm{tg}\ (360^0 - 42^0) = -\mathrm{tg}\ 42^0$$

Prelaz se može vršiti na dva načina, npr.:

$$\mathrm{ctg}\ 318^0 42'21'' = \mathrm{ctg}\ (270^0 + 48^0 42'21'') = -\mathrm{tg}\ 48^0 42'21'' = -1{,}139$$
$$\mathrm{ctg}\ 318^0 42'21'' = \mathrm{ctg}\ (360^0 - 41^0 17'39'') = -\mathrm{ctg}\ 41^0 17'39'' = -1{,}139$$

Obično se vrši prvi prelaz, da se izbjegne preračunavanje minuta i sekunda.

§ 6. FUNKCIJE ZBROJA KUTOVA (TEOREM ADICIJE)



Sl. 47

Prema slici 47:

1. $\sin(\alpha + \beta) = AB = AC + CB = AC + DE$

   $AC = AD \cos\alpha$; $AD = \sin\beta$;

   $DE = OD \sin\alpha$; $OD = \cos\beta$. Uvrštenje daje:

   $$\underline{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta} \tag{10}$$

2. $\cos(\alpha + \beta) = OB = OE - BE = OE - CD$

   $OE = OD \cos\alpha$; $OD = \cos\beta$;

   $CD = AD \sin\alpha$; $AD = \sin\beta$. Uvrštenje daje:

   $$\underline{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.} \tag{11}$$

Prema (3) možemo pisati:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \text{prema (10) i (11)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}.$$

Diobom brojnika i nazivnika desne strane sa $\cos\alpha \cos\beta$ dobivamo:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}. \tag{12}$$

Na sličan način:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}.$$

Brojnik i nazivnik desne strane podijelimo sa $\sin\alpha\ \sin\beta$, što daje:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}. \tag{13}$$

§ 7. FUNKCIJE RAZLIKE KUTOVA

U formuli (10), (11), (12) i (13) uvrstimo $(-\beta)$ mjesto β; uzevši u obzir formule (1) dobivamo:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \tag{14}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \tag{15}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \tag{16}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}. \tag{17}$$

§ 8. FUNKCIJE DVOSTRUKOG I POLOVIČNOG KUTA

Ako u formule (10), (11), (12) i (13) uvrstimo $\beta = \alpha$, imat ćemo:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha \tag{18}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \tag{19}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \tag{20}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2 \operatorname{ctg}\alpha}. \tag{21}$$

Pomoću tih formula za dvostruki kut možemo izračunati $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$ itd.

Npr. $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) =$ prema $(10) = \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin\alpha = 2 \sin\alpha \cos^2\alpha + \sin\alpha \cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3 \sin\alpha \cos^2\alpha - \sin^3\alpha =$ prema $(2) = 3 \sin\alpha (1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha = 3 \sin\alpha - 4 \sin^3\alpha$.

$$\sin 3\alpha = 3 \sin\alpha - 4 \sin^3\alpha \tag{18a}$$

Na sličan način dobiva se:

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3\alpha - 3 \cos\alpha. \tag{19a}$$

Izvedi to!

Ako stavimo u formule (18) do (21) $\frac{\alpha}{2}$ umjesto α, dobivamo:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\alpha &= 2 \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \\
\cos\alpha &= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \\
\operatorname{tg}\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \\
\operatorname{ctg}\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}.
\end{aligned}\right| \tag{22}$$

Prema formuli (2) možemo pisati:

$1 = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}$, a druga formula sustava (22) glasi:

$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$. Zbroj, odnosno razlika tih formula, daje:

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \tag{23}$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \tag{24}$$

Odatle slijedi:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \tag{25}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}. \tag{26}$$

Podijelimo li formulu (25) s (26), odnosno (26) s (25), dobivamo:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \tag{27}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \tag{28}$$

Uvrstimo li u formule (23) i (24) 2α mjesto α, imamo:

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$$

Odatle:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \\ \cos\alpha &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \end{aligned}\right| \tag{29}$$

Odatle dobivamo dijeljenjem:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}} \\ \operatorname{ctg}\alpha &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}} \end{aligned}\right| \tag{29a}$$

Primjeri:

1) $\sin 75^\circ = \sin (30^\circ + 45^\circ)$ = prema (10) = $\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 45^\circ$ =

prema tablici u § 2 = $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1).$

2) $\cos 75^\circ = \cos (30^\circ + 45^\circ)$ = prema (11) = $\cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ$ =

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1).}$$

Pokus prema (2):

$$\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ = \frac{2}{16}(3 + 2\sqrt{3} + 1) + \frac{2}{16}(3 - 2\sqrt{3} + 1) =$$

$$= \frac{1}{8}(4 + 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3}) = 1.$$

3) $\sin 15^\circ = \sin (60^\circ - 45^\circ)$ = prema (14) = $\sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ$ =

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1).}$$

Pokus:

$$\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \text{ prema primjeru 2) } = \underline{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1).}$$

4) $\cos 15^\circ = \cos \frac{30^\circ}{2}$ = prema (26) = $\sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$

$\cos 15^\circ = \sin 75^\circ$ = prema primjeru 1) = $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1).$

Pokaži da su oba rezultata identična (kvadriraj!).

§ 9 ZBROJ I RAZLIKA SINUSA I KOSINUSA PREDOČENA UMNOŠKOM

Ovaj način prikazivanja sinusa i kosinusa prikladan je za logaritmiranje.

Prema formulama (10) i (14) imamo:

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y.$$

Stavimo: $x + y = \alpha$; $x - y = \beta$, tada je $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$, a $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$.

Uvrstimo to u gornje formule, pa ih zbrojimo, a nakon toga oduzmemo.

Dobivamo:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{30}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{31}$$

Postupajući na sličan način s formulama (11) i (15) dobit ćemo:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{32}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{33}$$

Formule (30) do (33) uklj. upotrebljavaju se kada treba transformirati izraze u kojima dolazi zbroj ili razlika trigonometrijskih funkcija, u izraze, u kojima te funkcije dolaze u obliku umnoška, da se npr. omogući logaritmiranje.

§ 10. UMNOŽAK SINUSA I KOSINUSA PREDOČEN U OBLIKU ZBROJA I RAZLIKE

Načinimo li zbroj, pa razliku formula (10) i (14), dobit ćemo:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= 2 \sin\alpha \cos\beta \\ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) &= 2 \cos\alpha \sin\beta. \end{aligned} \tag{34}$$

Odatle:

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right] \tag{35}$$

$$\cos\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\right] \tag{36}$$

Postupajući na sličan način s formulama (11) i (15) dobit ćemo:

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right] \tag{37}$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right] \tag{38}$$

§ 11. IZRAČUNAVANJE VRIJEDNOSTI GONIOMETRIJSKIH FUNKCIJA IZ ZADANOG KUTA

To se vrši pomoću tablica. U tu svrhu nam služi ili tablica prirodnih vrijednosti goniometrijskih funkcija ili tablica logaritama tih vrijednosti. U prvoj su tablici navedene vrijednosti funkcija u većim razmacima, često tek svakih 10' (vidi npr. dr Majcen, Logaritamske tablice, tablica II), te interpolacija nije jednostavna i ne vodi do tačnih vrijednosti. Zato se obično računaju vrijednosti goniometrijskih funkcija logaritamskim putem pomoću tablice logaritama tih funkcija, u kojoj su vrijednosti logaritama navedene u mnogo užim razmacima, npr. u Majcenovim logaritamskim tablicama (tablica III, za svaku minutu 1').

Sadrži li zadani kut sekunde, mora se interpolirati. Interpolacija se vrši po trojnom pravilu, pri čemu se rezultat interpolacije kod sinusa i tangensa d o d a j e, a kod kosinusa i kotangensa o d u z i m a, jer prve dvije funkcije rastu, a druge dvije padaju u I kvadrantu (vidi § 2).

Primjeri:

1. $\cos 143^\circ 24' 38'' = ?$
   $\cos 143^\circ 24' 38'' = \cos (90^\circ + 53^\circ 24' 38'') = -\sin 53^\circ 24' 38''$ (v. § 5).

Iz tablice I i III vadimo:

$\log \sin 53^\circ 24' = 9{,}90462 - 10$, i iz stupca D 1'', koji daje promjenu logaritma sinusa pri povećanju kuta za 1'', vadimo 0,16 (jedinica petog decimalnog mjesta). Stoga: poveća li se kut za 1'', logaritam sinusa će se povećati za 0,16; da se izračuna za koliko će se povećati taj logaritam, ako se kut poveća za 38'', pišemo:

$1'' \ldots . 0{,}16$
$38'' \ldots \; x'$ odatle $\frac{1}{38} = \frac{0{,}16}{x}$, pa $x = 0{,}16 \cdot 38 = 6{,}08 \doteq 6$

To pribrajamo (sinus je!):
$$\begin{array}{r} 9{,}90462 - 10 \\ +\,6 \quad\;\; \\ \hline 9{,}90468 - 10 \end{array}$$

Dakle: $\log \sin 53^\circ 24'38'' = 9{,}90468 - 10 = 0{,}90468 - 1$.

Iz tablice I »Logaritmi brojeva« dobivamo antilogaritmirajući:

$\sin 53^\circ 24'38'' = 0{,}80293$, a dakle:

$\underline{\cos 143^\circ 24'38'' = -0{,}80293.}$

2. $\mathrm{ctg}\ 213^\circ 53'17'' = ?$

$\mathrm{ctg}\ 213^\circ 53'17'' = \mathrm{ctg}\,(180^\circ + 33^\circ 53'17'') = \mathrm{ctg}\ 33^\circ 53'17''$ (vidi § 5).

Tablica V: $\log \mathrm{ctg}\ 33^\circ 53' = 10{,}17292 - 10$; $D\,1'' = 0{,}46$;

$D\,17'' = 0{,}46 \cdot 17 = 7{,}82 \doteq 8.$ $\quad \underline{-8}$ oduzimamo (ctg!)

$$\log \mathrm{ctg}\ 33^\circ 53'17'' = 10{,}17284 - 10 = 0{,}17284.$$

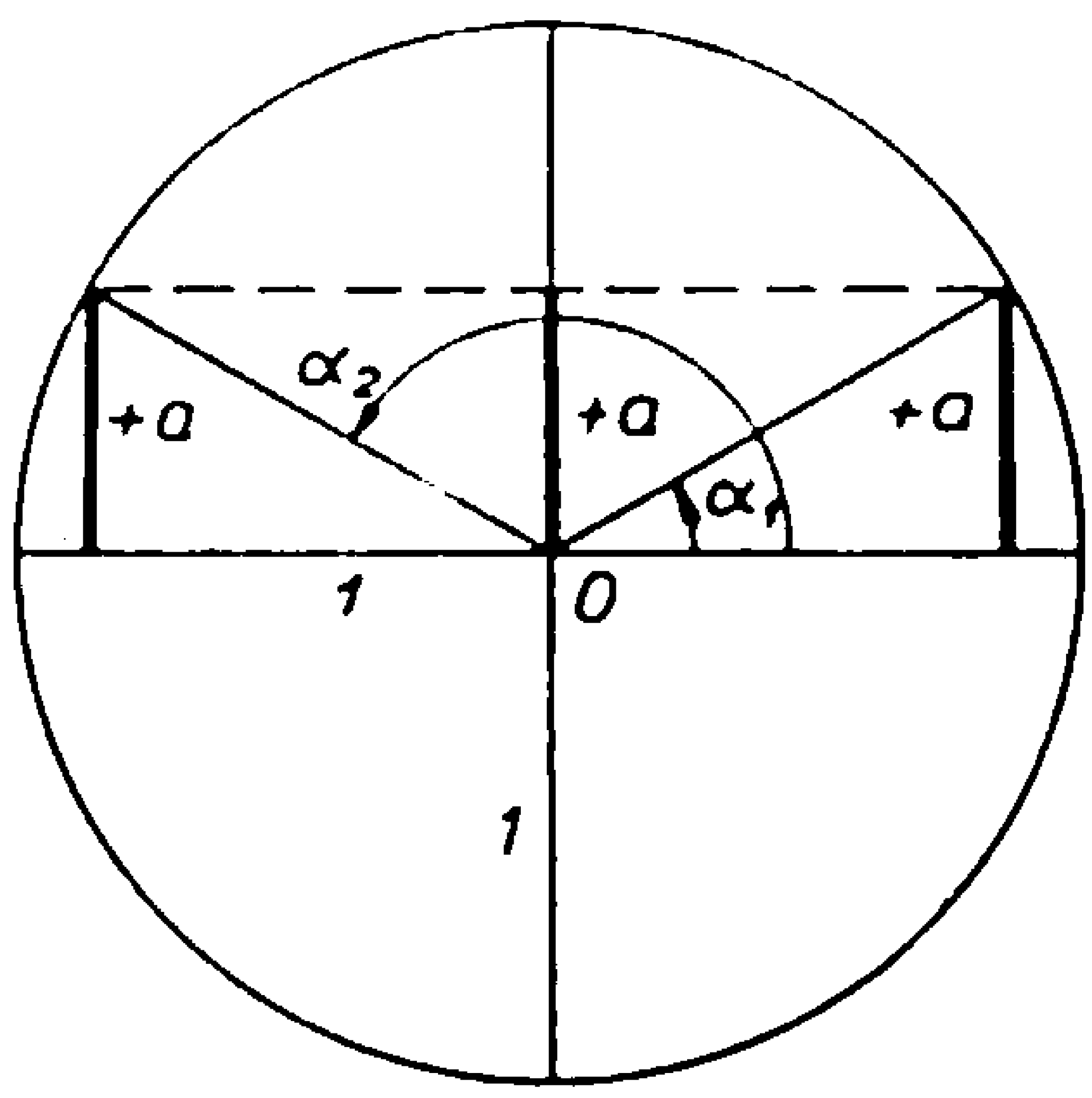
Tablica I: $\underline{\mathrm{ctg}\ 213^\circ 53'17'' \doteq 1{,}48883.}$

Pamti! Kad tražiš logaritam trigonometrijske funkcije, uvijek množi vrijednost izvađenu iz stupca $D\,1''$ sa brojem sekunda zadanog kuta!

§ 12. RAČUNANJE VRIJEDNOSTI KUTA IZ ZADANE VRIJEDNOSTI GONIOMETRIJSKE FUNKCIJE

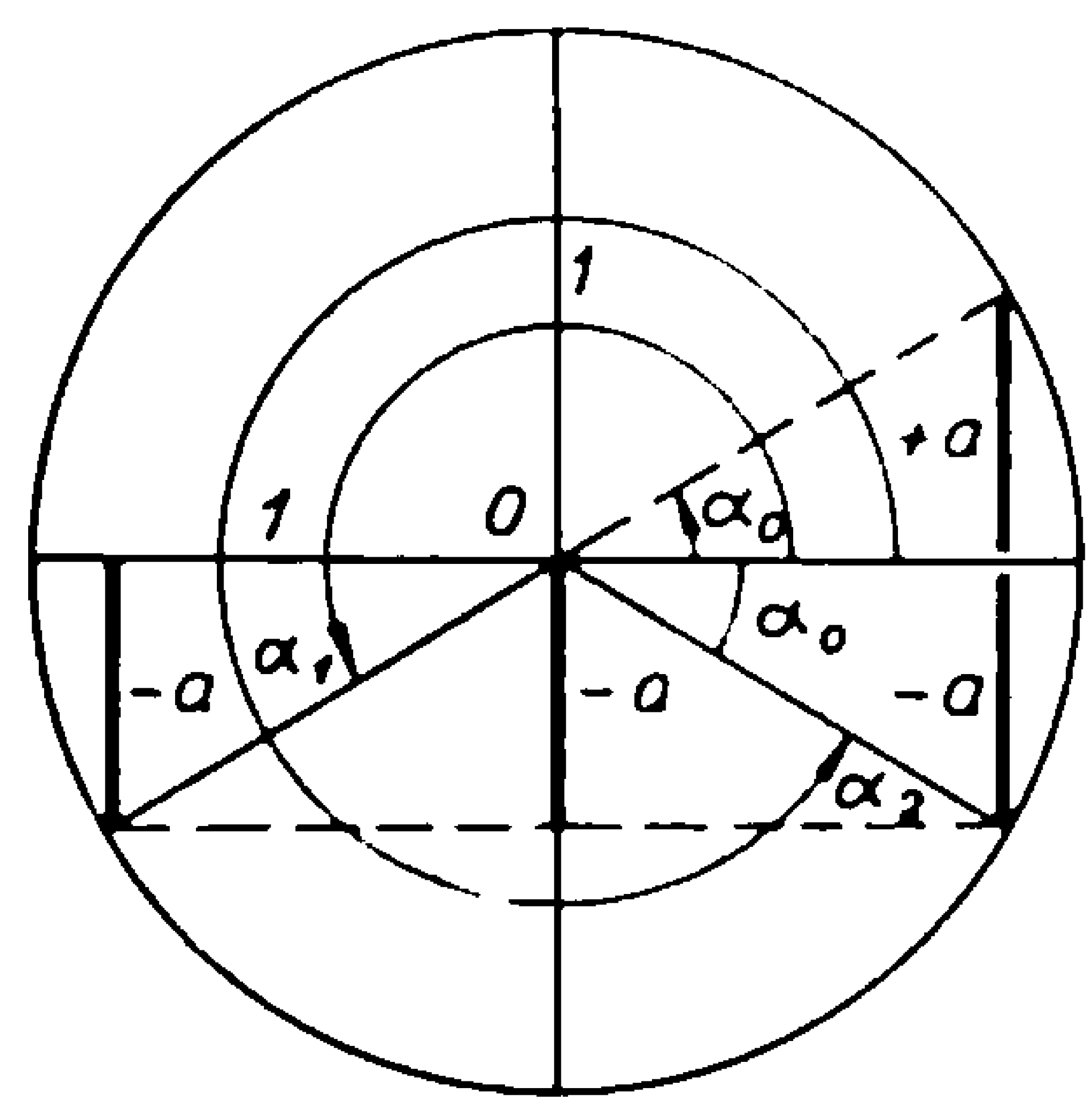
Računanje vrijednosti kuta iz zadane vrijednosti goniometrijske funkcije vrši se također pomoću tablice logaritama goniometrijskih funkcija (npr. Majcen tabl. III). Kako se vidi iz slika 48 do 55, jednoj zadanoj vrijednosti funkcije odgovaraju uvijek dvije vrijednosti kuta.

a) $\sin \alpha = + a$, gdje je a zadana vrijednost. $\alpha = ?$



a)

Sl. 48



b)

Sl. 49

α_1 se dobije logaritamskim putem, a $\alpha_2 = 180^0 - \alpha_1$, jer je prema sl. 48 i § 5.

$\sin \alpha_2 = \sin (180^0 - \alpha_1) = \sin \alpha_1 = a.$

a_1) $\sin \alpha = - a; \quad \alpha = ?$

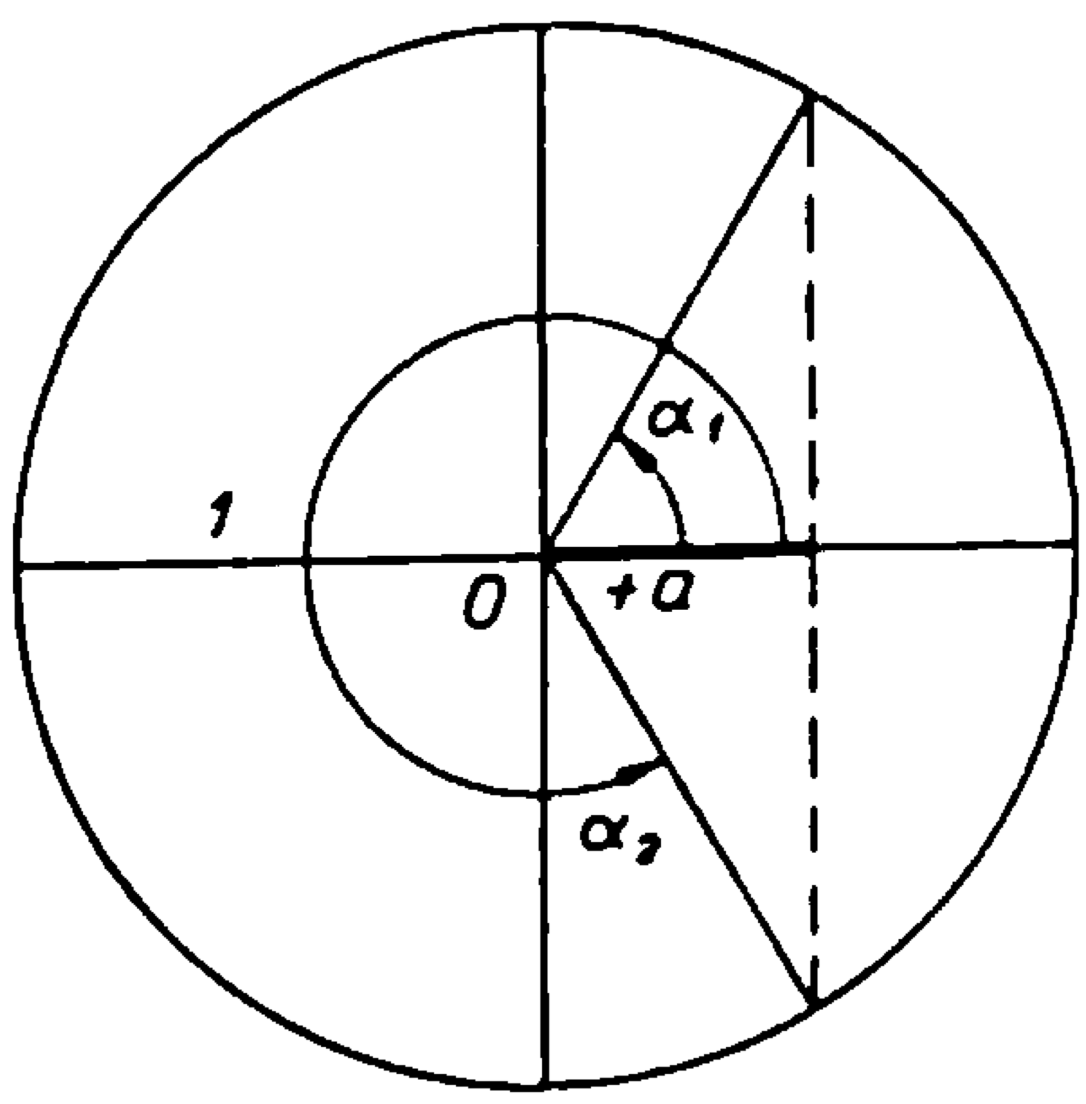
$\sin \alpha_0 = + a$

α_0 se dobije logaritamskim putem, a $\alpha_1 = 180^0 + \alpha_0$; $\alpha_2 = 360^0 - \alpha_0$, jer je prema slici 49 i § 5:

$$\sin \alpha_2 = \sin \alpha_1 = - a.$$

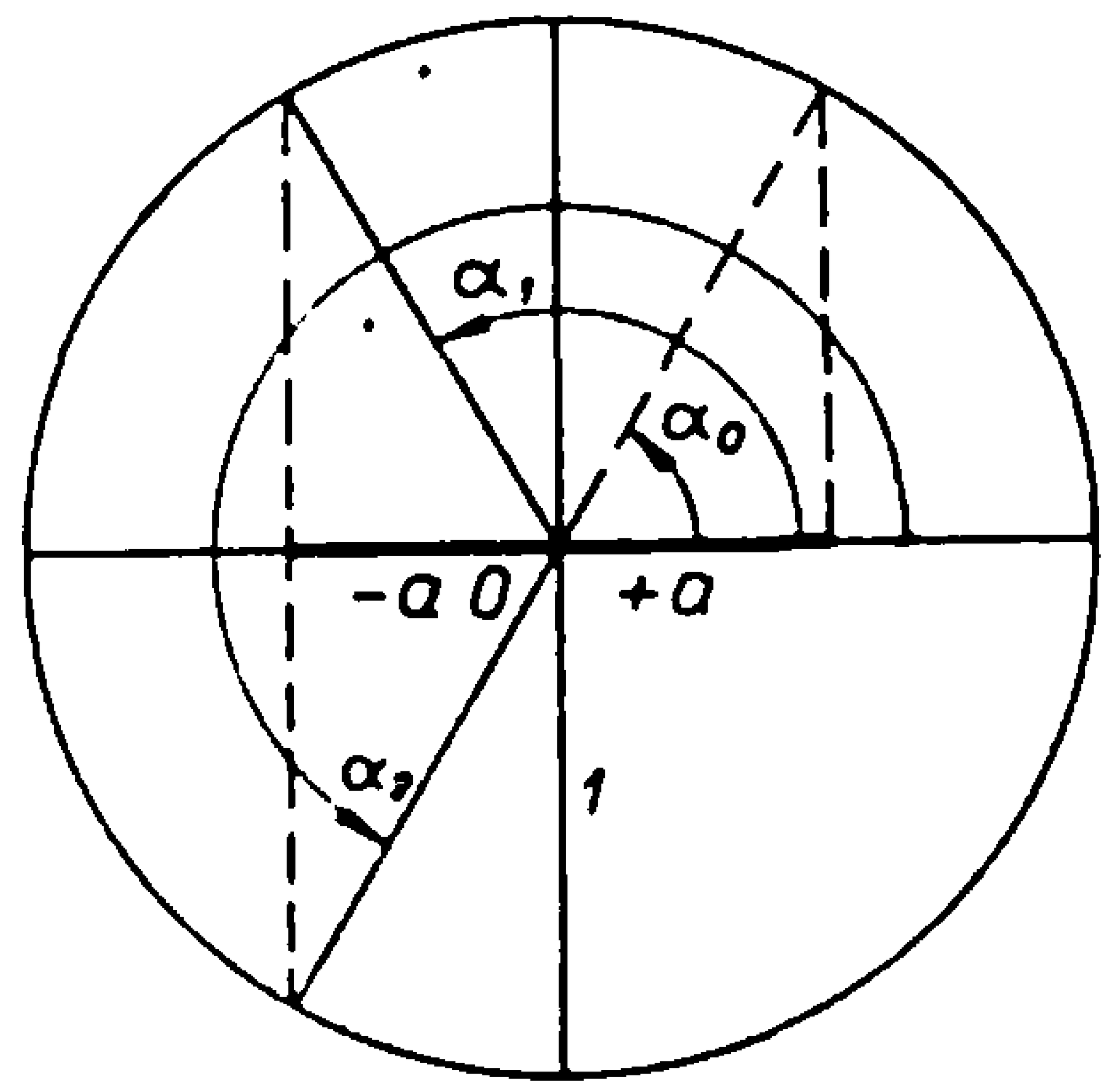
b) $\cos \alpha = + a; \qquad \alpha = ?$

α_1 se dobije logaritamskim putem, a $\alpha_2 = 360^0 - \alpha_1$, jer je $\cos \alpha_2 = \cos \alpha_1 = \alpha$. (Vidi sl. 50).



a)

Sl. 50



b)

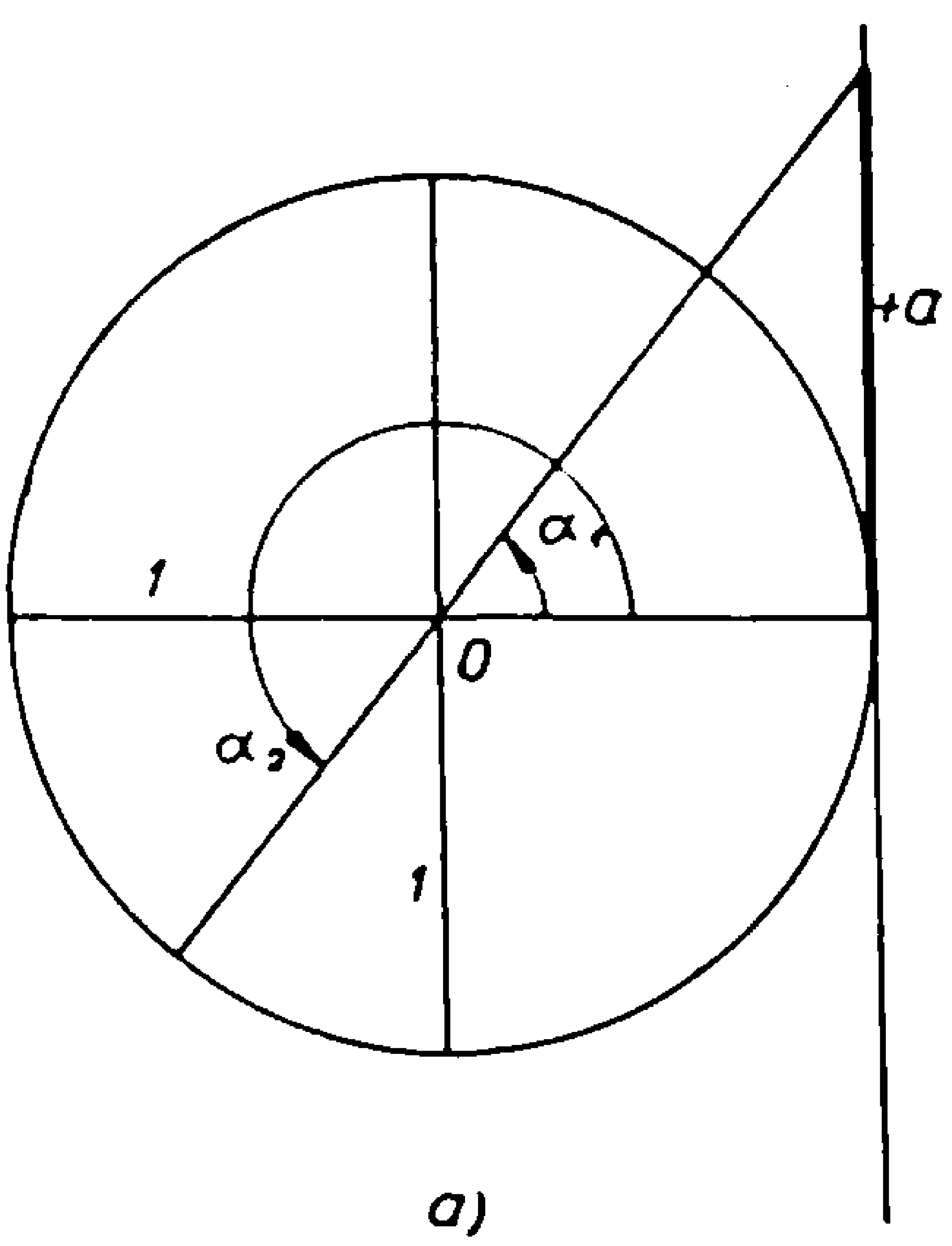
Sl. 51

b$_1$) $\cos \alpha = - a; \quad \alpha = ?$

$\cos \alpha_0 = + a$

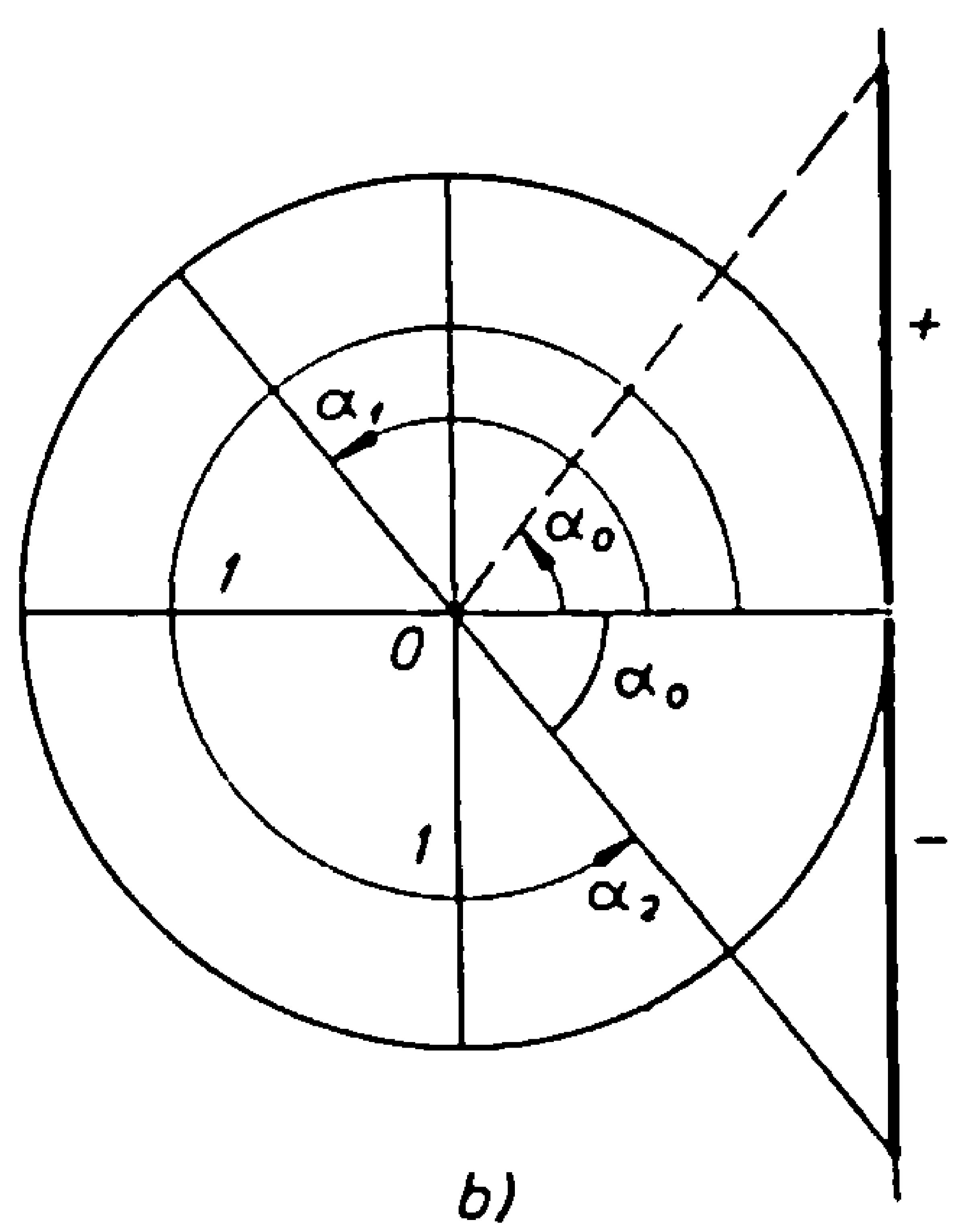
α_0 se dobije logaritanskim putem, a $\alpha_1 = 180^0 - \alpha_0$, dok je $\alpha_2 = 180^0 + \alpha_0$, jer je $\cos \alpha_2 = \cos \alpha_1 = - a$. (Vidi sl. 51).

c) $\operatorname{tg} \alpha = + a; \quad \alpha = ?$



a)

Sl. 52



b)

Sl. 53

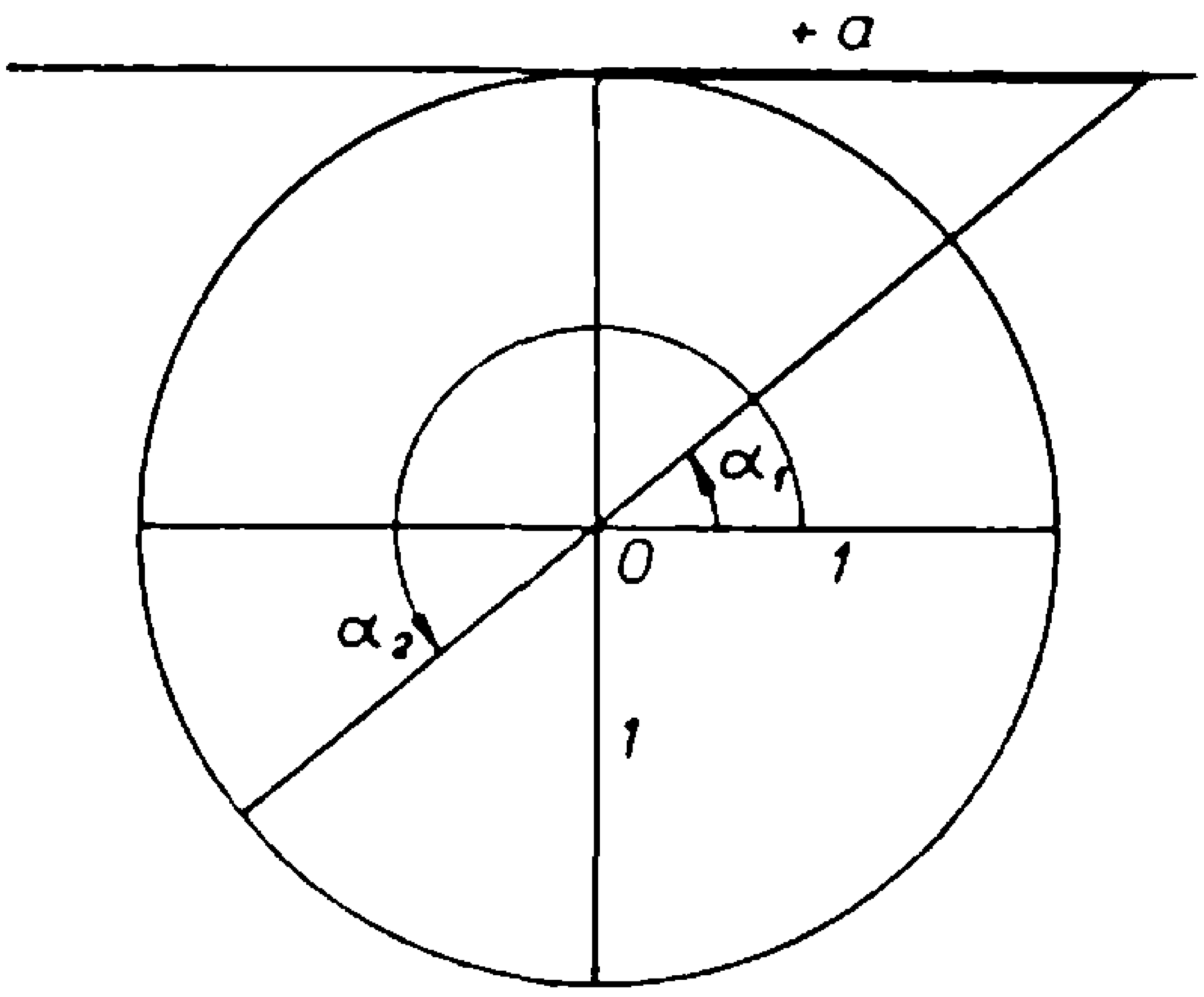
α_1 se dobije log. putem, a $\alpha_2 = 180^0 + \alpha_1$, jer je $\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_1 = a$ (Vidi sl. 52).

c$_1$) $\operatorname{tg} \alpha = - a; \quad \alpha = ?$

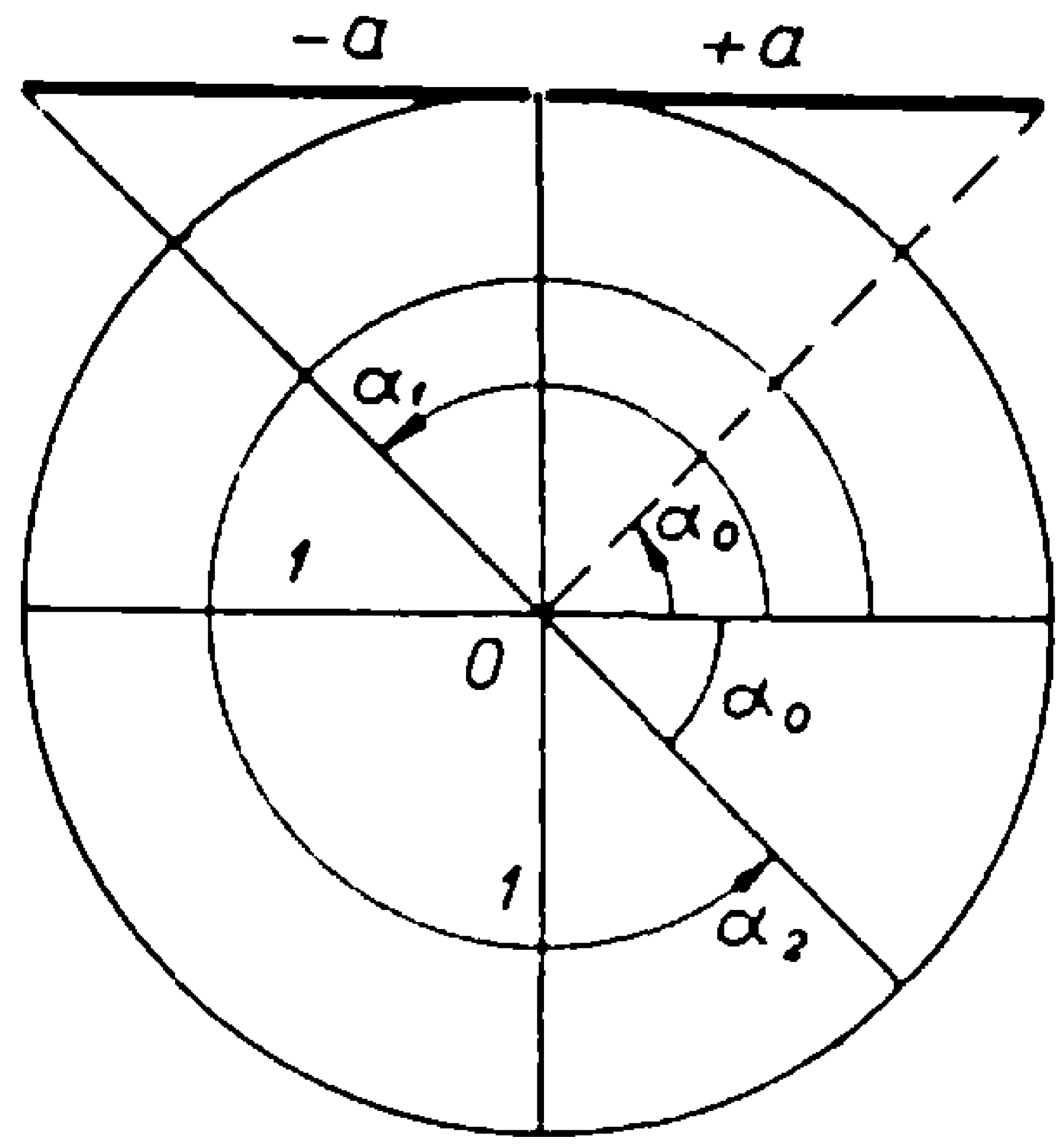
$\operatorname{tg} \alpha_0 = + a$

α_0 se dobije log. putem, a $\alpha_1 = 180^0 - \alpha_0$, dok je $\alpha_2 = 360^0 - \alpha_0$, jer je $\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_1 = -a$. (Vidi sl. 53).

d) $\operatorname{ctg} \alpha = + a$; $\alpha = ?$



Sl. 54



Sl. 55

α_1 se dobije log. putem, a $\alpha_2 = 180^0 + \alpha_1$, jer je $\operatorname{ctg} \alpha_2 = \operatorname{ctg} \alpha_1 = a$. (Vidi sl. 54).

d$_1$) $\operatorname{ctg} \alpha = - a$; $\alpha = ?$

α_0 se dobije log. putem, a $\alpha_1 = 180^0 - \alpha_0$, dok je $\alpha_2 = 360^0 - \alpha_0$, jer je $\operatorname{ctg} \alpha_2 = \operatorname{ctg} \alpha_1 = - a$. (Vidi sl. 55).

Iz navedenog slijedi:

K u t, k o j i l e ž i u II k v a d r a n t u r a č u n a m o p r e m a f o r m u l i $(180^0 - \alpha_0)$, k u t u III k v a d r a n t u — p r e m a $(180^0 + \alpha_0)$, a k u t u IV k v a d r a n t u — p r e m a $(360^0 - \alpha_0)$, g d j e j e α_0 k u t u I k v a d r a n t u.

Primjeri:

1. $\sin \alpha = 0{,}56877$; $\alpha = ?$

Logaritmiranje pomoću tablice I daje:

$$\log \sin \alpha = 0{,}75494 - 1 = 9{,}75494 - 10.$$

U tablici III nalazimo u stupcu log sin najbliži manji logaritam (9,75478—10), vadimo pripadni kut 34°39' i promjenu logaritma sinusa, kad se kut poveća za 1", ovdje $D\,1'' = 0{,}31$, pa računamo razliku između našeg logaritma i uzete tablične vrijednosti (ovdje 16 jedinica petog dec. mjesta). Da nađemo broj sekunda za koje će porasti kut kad se njegov log sin poveća za 16, postavimo razmjer:

$$0{,}31 : 16 = 1 : x,$$

a odatle:

$$x = \frac{16}{0,31} = 51,8'' \doteq 52''.$$

Dakle prema a) $\underline{\alpha_1 = 34^\circ 39' 52''}$ i $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1 = \underline{145^\circ 20' 08''}$.

2. $\cos\alpha = -0,67885;$ $\qquad \cos\alpha_0 = +0,67885.$

Tablica I:

$\log\cos\alpha_0 = \log 0,67885 = 0,83178-1 = 9,83178 - 10.$

$$\begin{array}{r} -74 \\ \hline 4 \end{array}$$

Tablica V:

kut: $47^\circ 15'$ $\qquad D\,1'' = 0,23;$ $\quad \dfrac{4}{0,23} = 17,4 \doteq 17''.$

$$\begin{array}{r} -17'' \\ \hline \alpha_0 = 47^\circ 14' 43'' \end{array}$$

prema b_1) $\alpha_1 = 180^\circ - \alpha_0 = \underline{132^\circ 45' 17''}$

$\alpha_2 = 180^\circ + \alpha_0 = \underline{227^\circ 14' 43''}.$

Pamti!

Kad određuješ kut iz logaritma trigonometrijske funkcije, uvijek dijeli razliku između tog logaritma i njemu najbliže manje tablične vrijednosti sa tabličnom razlikom izvađenom iz stupca $D\,1''$. Broj sekunda izračunat na taj način kod sinusa i tangensa pribrojiš kutu, a kod kosinusa i kontangensa oduzmeš od kuta, jer s povećanjem vrijednosti trigonometrijske funkcije ili njenog logaritma pripadni kut kod sinusa i tangensa raste, a kod kosinusa i kontangensa opada.

Primjedba: Ako se prema uvjetima zadatka traži samo približna vrijednost kuta, vadimo je iz tablice prirodnih vrijednosti goniometrijskih funkcija (npr. Majcen, tabl. II).

Primjer:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 1,132; \qquad \alpha = ?$$

$(2\alpha)_1 \doteq 48^\circ 30';$ $\quad (2\alpha)_2 \doteq 180^\circ + 48^\circ 30' = 228^\circ 30'$, odatle

$\underline{\alpha_1 \doteq 24^\circ 15'}$; $\quad \underline{\alpha_2 \doteq 114^\circ 15'}$.

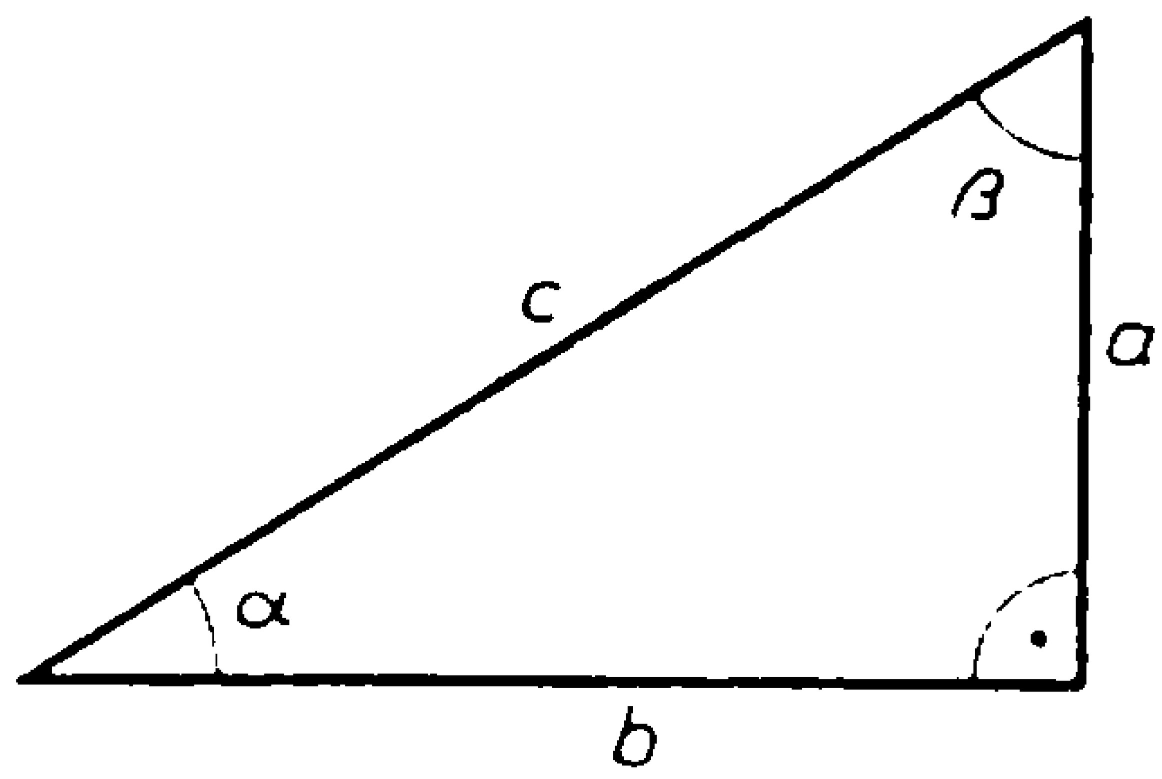
§ 13. RJEŠAVANJE PRAVOKUTNIH TROKUTA

1. ODREĐIVANJE KATETA

Iz definicije goniometrijskih funkcija (vidi § 1) slijedi:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}\,,\ \text{odatle}\ a = c\cdot\sin\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c}\,,\ \text{odatle}\ a = c\cdot\cos\beta,\ \text{tj.}$$



Sl. 56

$$a = c\cdot\sin\alpha = c\cdot\cos\beta$$

slično:

$$b = c\cdot\sin\beta = c\cdot\cos\alpha. \tag{39}$$

Kateta je jednaka hipotenuzi pomnoženoj sa sinusom kuta nasuprot toj kateti ili sa kosinusom kuta uz katetu.

Budući da je po definiciji (§ 1):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}\,,\ \text{izlazi}\ a = b\cdot\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}\,,\ \text{izlazi}\ a = b\cdot\operatorname{ctg}\beta,\ \text{tj.}$$

$$a = b\cdot\operatorname{tg}\alpha = b\cdot\operatorname{ctg}\beta$$

slično je

$$b = a\cdot\operatorname{tg}\beta = a\cdot\operatorname{ctg}\alpha. \tag{40}$$

Kateta je jednaka drugoj kateti pomnoženoj sa tangensom kuta nasuprot traženoj kateti ili sa kotangensom kuta uz tu katetu

2. ODREĐIVANJE HIPOTENUZE

Iz formula (39) slijedi:

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\cos\beta}$$

$$c = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{b}{\cos\alpha}\,. \tag{41}$$

Hipotenuza je jednaka kateti razdijeljenoj sa sinusom kuta nasuprot toj kateti ili sa kosinusom kuta uz tu katetu.

Da što brže riješiš pravokutni trokut, zapamti gore navedena tri pravila, pri čemu drži na pameti ovo:

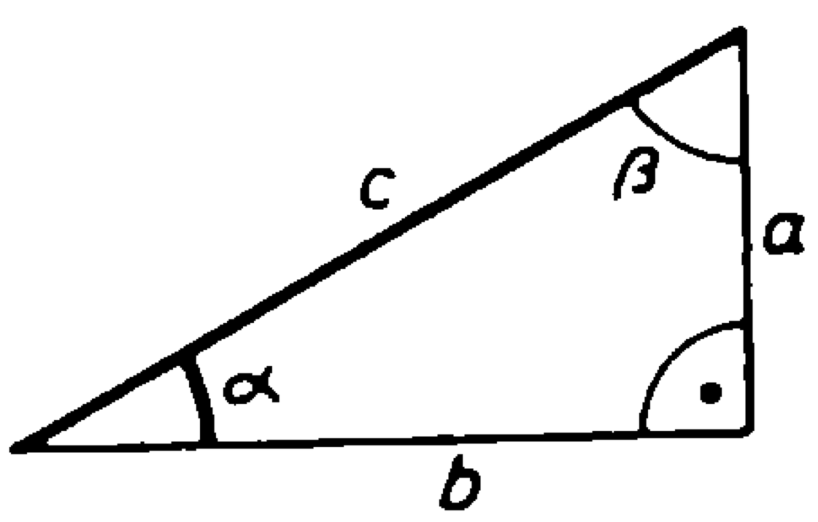
ako u račun ulazi h i p o t e n u z a, mogu doći u obzir samo funkcije sinusa i kosinusa; ako hipotenuza n e ulazi, dolaze samo funkcije tangensa ili kotangensa.

N a s u p r o t n i kut traži funkcije b e z »co«, a p r i l e ž e ć i sa »co«.

Rješavanje trokuta u svim niže navedenim primjerima provedeno je u obliku shema u kojim je u posljednjem stupcu naznačen rimskim brojkama redoslijed računanja i računske operacije. Taj način računanja osobito se preporučuje jer zauzima malo mjesta pa je pregledan, štedi utrošeno vrijeme na računanje i omogućuje brzo nalaženje i ispravak svake greške koja bi se slučajno uvukla u račun. Tražene elemente trokuta treba uvijek izraziti pomoću z a d a n i h, da se netačnosti u računanju ne bi provlačile kroz cijeli račun.

Primjeri:

1) Zadano: $c = 457{,}0$; $\alpha = 32^0\,40'\,15''$.



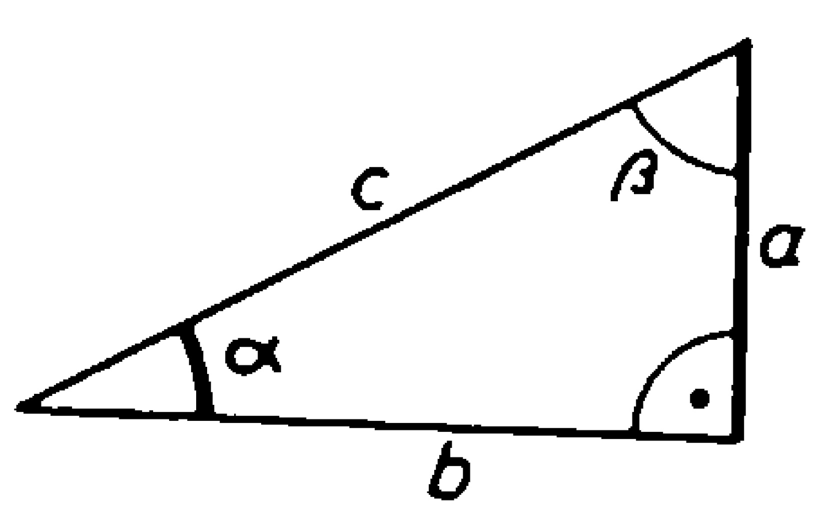
$\beta = 90^0 - \alpha$

$a = c \cdot \sin\alpha$

$b = c \cdot \sin\beta$

$c = 457{,}0$	$\sin\alpha$	9,73224 – 10	I
$\alpha = 32^0\,40'\,15''$	c	2,65992	II
$\beta = 57^0\,19'\,45''$	$\sin\beta$	9,92520—10	III
$a = 246{,}69$	a	2,39216	I + II
$b = 384{,}70$	b	2,58512	II + III

2) Zadano: $a = 9{,}82$; $\alpha = 63^0\,21'\,45''$.



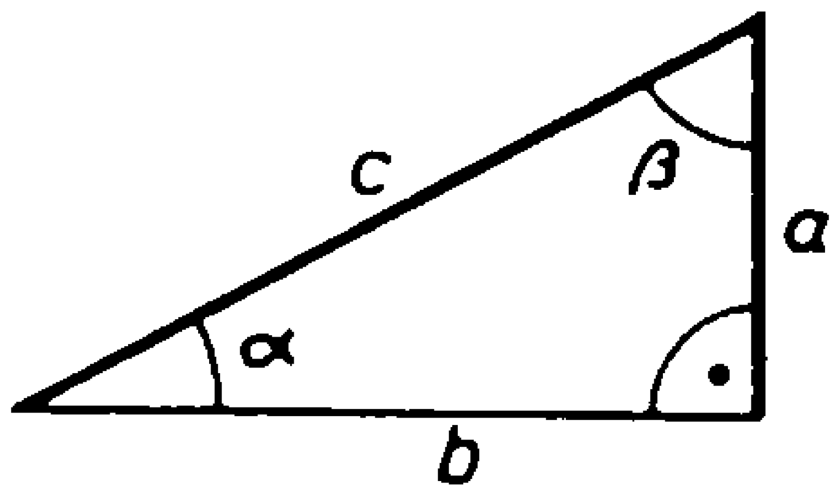
$\beta = 90^0 - \alpha$

$c = \dfrac{a}{\sin a}$

$b = a \operatorname{ctg}\alpha$

$a = 9{,}82$	a	0,99211	I
$\alpha = 63^0\,21'\,45''$	$\sin\alpha$	9,95127 – 10	II
$\beta = 26^0\,38'\,15''$	$\operatorname{ctg}\alpha$	9,70034 – 10	III
$c = 10{,}986$	c	1,04084	I — II
$b = 4{,}9255$	b	0,69245	I + III

3) Zadano: $c = 58{,}5$; $a = 47{,}54$.



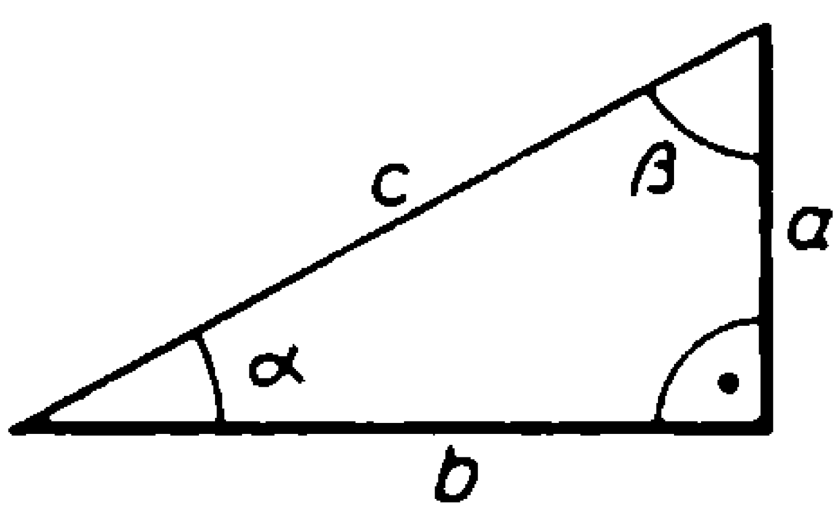
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\beta = 90^0 - \alpha$$

$$b = c \cdot \sin\beta$$

$c = 58{,}5$ $a = 47{,}54$ $\alpha = 54^0\,21'\,20''$ $\beta = 35^0\,38'\,40''$ $b = 34{,}091$	a c $\sin\beta$	1,67706 1,76716 9,76548—10	I II III
	$\sin\alpha$ b	9,90990 – 10 1,53264	I – II II + III

4) Zadano: $a = 23214$; $b = 38947$.



$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\beta = 90^0 - \alpha$$

$$c = \frac{a}{\sin\alpha}$$

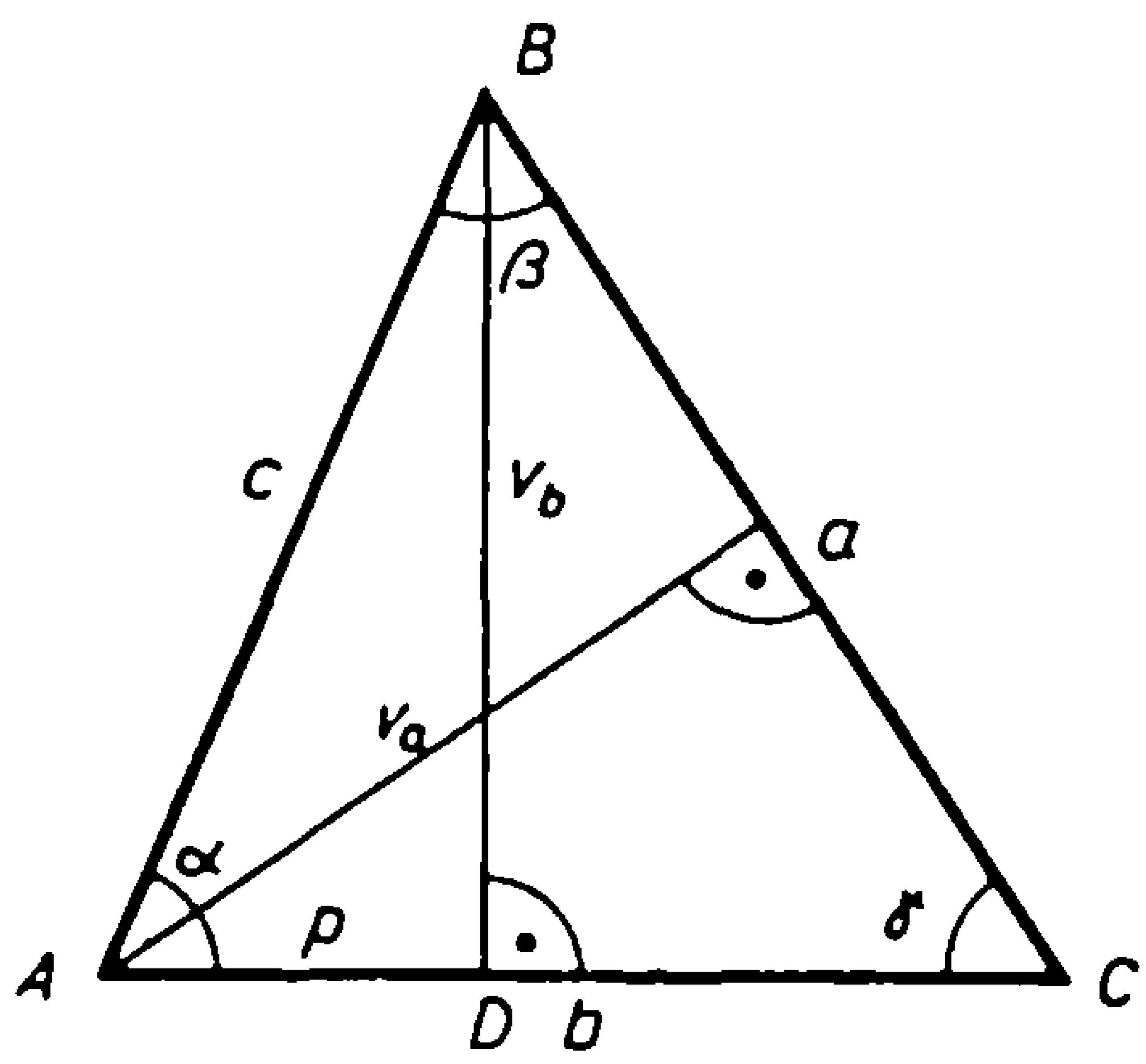
$a = 23214$ $b = 38947$ $\alpha = 30^0\,47'\,47''$ $\rho = 59^0\,12'\,13''$ $c = 45341$	a b $\sin\alpha$	4,36575 4,59048 9,70926—10	I II III
	$\mathrm{tg}\,\alpha$ c	9,77527—10 4,65649	I – II I – III

§ 14. RJEŠAVANJE KOSOKUTIH TROKUTA

1. OBIČNI SLUČAJEVI RJEŠAVANJA KOSOKUTNIH TROKUTA

Uglavnom se služimo sa tri poučka:

a) Sinusov poučak



Sl. 57

Iz pravokutnih trokuta ADB i BDC slijedi da je visina:

$$v_b = c \cdot \sin\alpha$$

$$v_b = a \cdot \sin\gamma.$$

Odatle: $c \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\gamma$

ili

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

ili:

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \quad \text{ili} \quad a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$$

Pomoću visine v_a dobiva se na isti način:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta}$$

ili:

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \quad \text{ili} \quad c : b = \sin\gamma : \sin\beta.$$

Prema tome je:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \tag{42}$$

ili:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

Sinusov poučak glasi:

U svakom se trokutu stranice odnose kao sinusi suprotnih kutova.

Da odredimo vrijednost stalnog omjera između stranice trokuta i njoj suprotnog kuta, tj. vrijednost omjera (42), opišemo oko zadanog trokuta ABC kružnicu (središte opisane kružnice O leži u sjecištu simetrala stranica!), povučemo promjer CD i spojimo D sa B. (Vidi sl. 58).

$$\sphericalangle CBD = 90^0, \sphericalangle BDC = \alpha \text{ (vidi: Geometrija § 1., 4).}$$

Iz pravokutnog $\triangle CBD$ slijedi:

$$a = 2r \sin \alpha.$$

Slično se dokazuje:

$$b = 2r \sin \beta$$

i

$$c = 2r \sin \gamma. \tag{43}$$

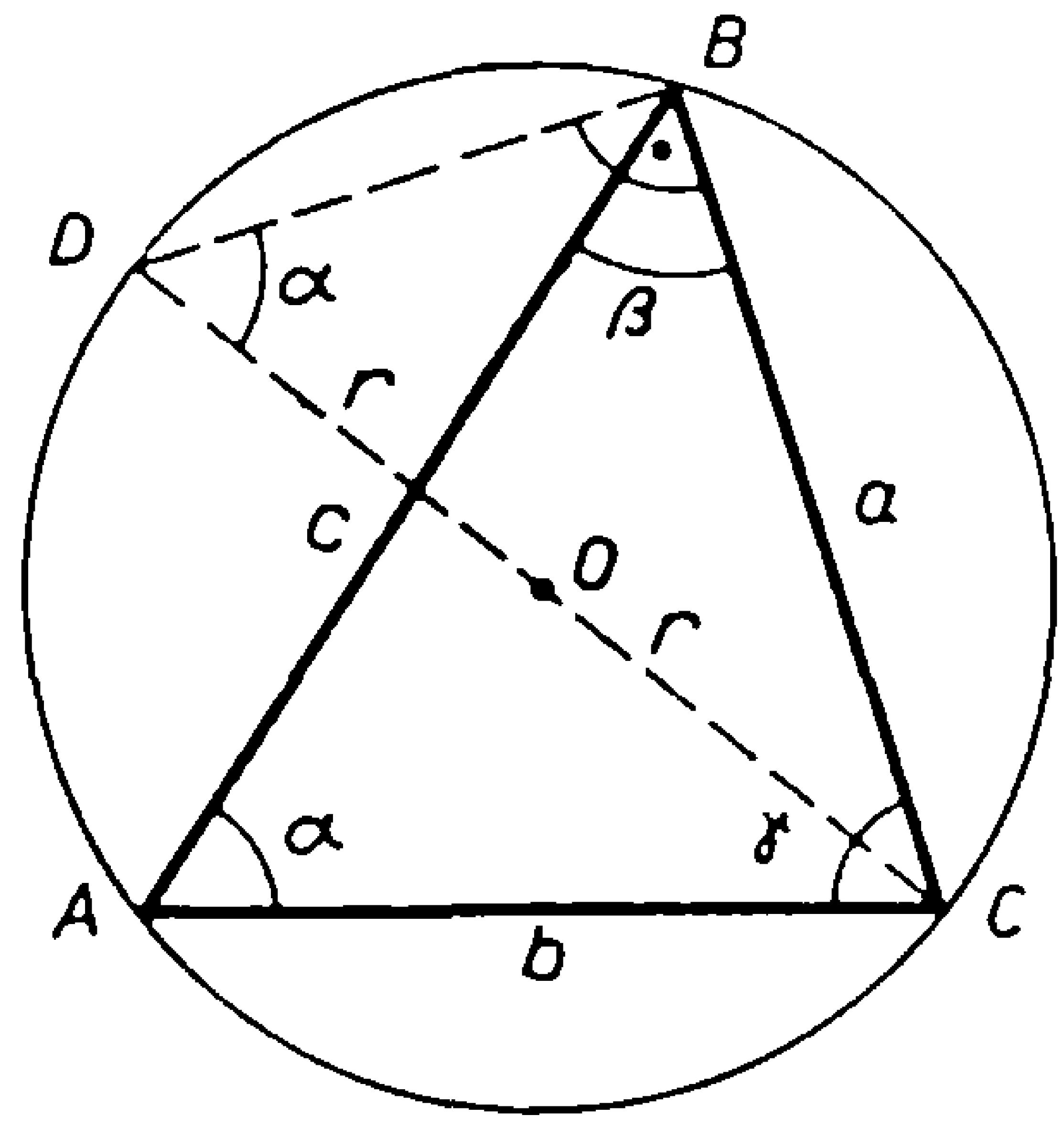
Odatle slijedi:

$$1)\quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r, \tag{44}$$

tj. omjer stranice i sinusa suprotnog kuta jednak je promjeru oko trokuta opisane kružnice.

2) Polumjer kružnice opisane oko trokuta:

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}. \tag{45}$$



Sl. 58

b) Kosinusov poucak

Prema slici 57 imamo:

$$a^2 = v^2{}_b + (b - p)^2, \text{ gdje je } AD = p, \text{ a također:}$$

$$v^2{}_b = c^2 - p^2.$$

Ako to uvrstimo, imamo:

$$a^2 = c^2 - p^2 + b^2 - 2bp + p^2, \quad \text{ili} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bp,$$

ali prema slici:

$$p = c \cdot \cos \alpha, \quad \text{dakle}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cdot \cos \alpha$$

Slično:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ca \cdot \cos \beta \tag{46}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cdot \cos \gamma$$

Kosinusov poučak glasi:

K v a d r a t s t r a n i c e t r o k u t a j e d n a k j e z b r o j u k v a d r a t a d r u g i h d v i j u s t r a n i c a s m a n j e n o m z a d v o s t r u k i u m n o ž a k t i h s t r a n i c a, p o m n o ž e n s a k o s i n u s o m k u t a k o j i o n e z a t v a r a j u.

Ako je jedan kut u trokutu, npr. β, pravi, to je $\cos\beta = \cos 90^0 = 0$, pa prema drugoj formuli gornjeg sustava dobivamo:

$$b^2 = c^2 + a^2,$$

a to je Pitagorin poučak.

c) Tangensov poučak

Prema sinusovom poučku vrijedi:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$ što se može pisati u obliku:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}$$ ili s obzirom na formule (30) i (31):

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

a odatle:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Slično:

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}} \qquad (47)$$

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}$$

Tangensov poučak glasi:

O m j e r z b r o j a i r a z l i k e d v i j u s t r a n i c a t r o k u t a j e d n a k j e o m j e r u t a n g e n s a p o l u z b r o j a i p o l u r a z l i k e s u p r o t n i h k u t o v a.

d) Primjena sinusova, kosinusova i tangensova poučka za rješavanje kosokutnih trokuta

Sinusov poučak upotrebljava se za izračunavanje trokuta, u kojim je zadano:

a) jedna stranica i dva kuta (vidi dalje primjer 1) ili

b) dvije stranice i kut koji leži nasuprot jednoj od tih stranica (vidi primjer 2).

Kosinusov poučak primjenjuje se ako su u trokutu zadane dvije stranice i kut između njih. No kako je kosinusov pučak nezgodan za logaritmiranje, češće se primijenjuje tangensov poučak, kome se u tom slučaju daje ovaj oblik:

Kako je: $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, to je: $\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$, a

$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$. To se uvrsti u prvu formulu sustava (47) i izračuna:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{(a - b) \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}{a + b}. \tag{47a}$$

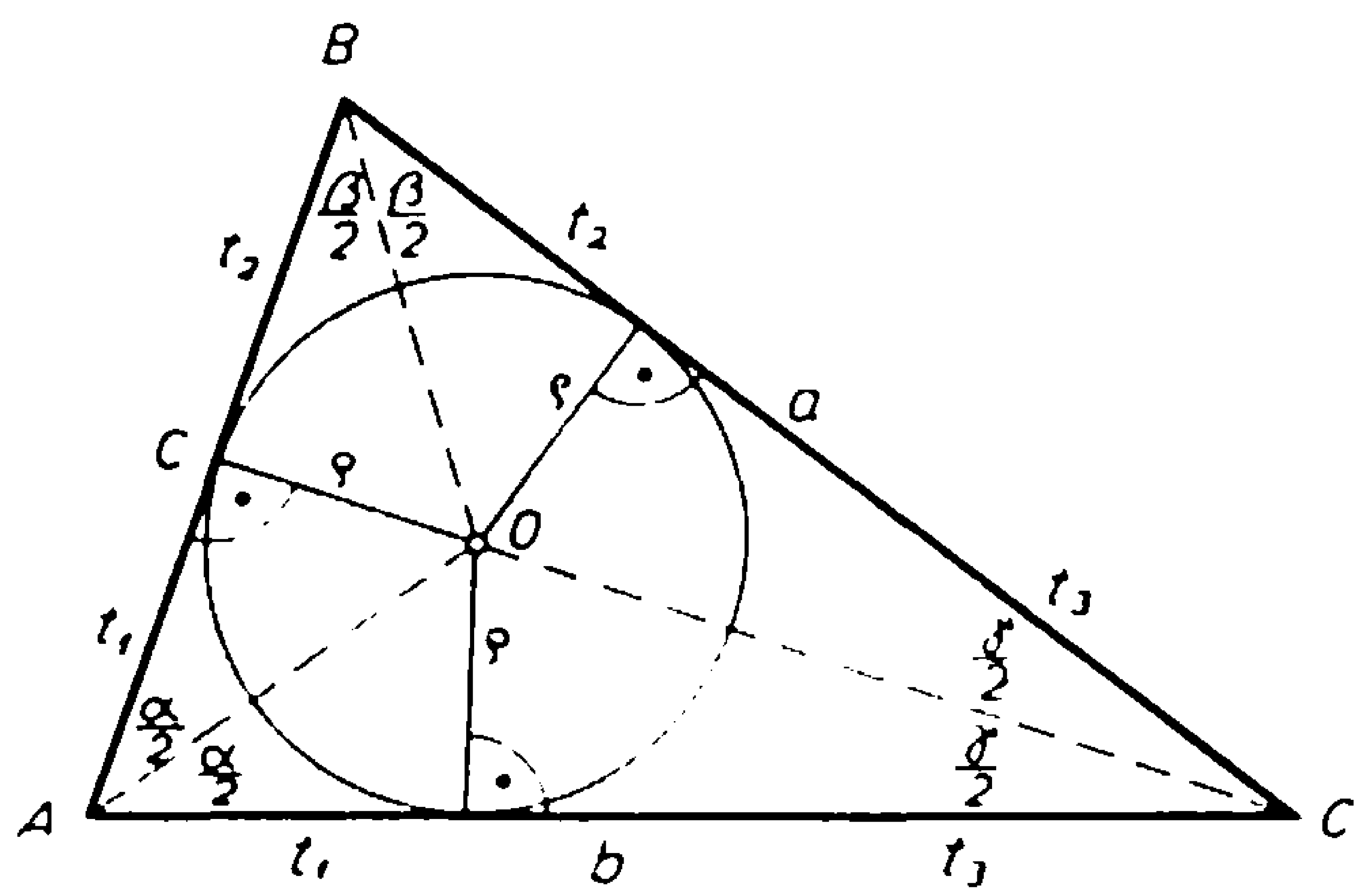
Iz te formule odredi se vrijednost $\frac{\alpha - \beta}{2}$, a da se izračunaju kutovi α i β, ta se vrijednost najprije doda, a zatim oduzme od $\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$.

Konačno se po sinusovom poučku odredi stranica c (vidi primjer 3).

Postoji više načina da se riješi trokut u kojemu su poznate sve tri stranice a, b, c. Izvedimo jedan sustav formula za taj slučaj.

U zadani trokut ABC upišemo kružnicu. Simetrale kutova trokuta sijeku se u središtu O upisane kružnice, čiji je polumjer označen sa ϱ, i dijele trokut u tri para pravokutnih sukladnih trokuta.

Iz tih trokuta prema slici 59 slijedi:



Sl. 59

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} &= \frac{\rho}{t_1} \\ \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} &= \frac{\rho}{t_2} \\ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} &= \frac{\rho}{t_3}, \end{aligned}\right| \tag{a}$$

a kako je prema slici:

$$\left.\begin{aligned} t_2 + t_3 &= a \\ t_1 + t_3 &= b \\ t_1 + t_2 &= c \end{aligned}\right| + \tag{b}$$

$$2\,(t_1 + t_2 + t_3) = a + b + c,$$

dobivamo:

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{a + b + c}{2} = s, \tag{c}$$

gdje je s oznaka poluopsega trokuta.

Oduzme li redom od (c) jednakosti (b), dobit ćemo:

$$t_1 = s - a$$

$$t_2 = s - b$$

$$t_3 = s - c,$$

a njihovo uvrštenje u (a) daje

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\rho}{s - a}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\rho}{s - b}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\rho}{s - c}$$

Da bismo odredili ρ, računat ćemo ploštinu P trokuta ABC kao zbroj ploština trokuta BOC, COA i AOB:

$$P = \frac{a \cdot \rho}{2} + \frac{b \cdot \rho}{2} + \frac{c \cdot \rho}{2} = \rho \cdot \frac{a + b + c}{2} = \rho \cdot s. \tag{d}$$

Odatle:

$$\rho = \frac{P}{s}.$$

Uvrstimo li ovamo Heronovu formulu za ploštinu trokuta:

$$P = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)},$$

dobit ćemo:

$$\rho = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Tako smo dobili traženi sustav formula za rješavanje trokuta u kojem su zadane sve tri stranice a, b i c:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} &= \frac{\rho}{s-a} \\ \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} &= \frac{\rho}{s-b} \\ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} &= \frac{\rho}{s-c} \end{aligned}\right| \qquad (48)$$

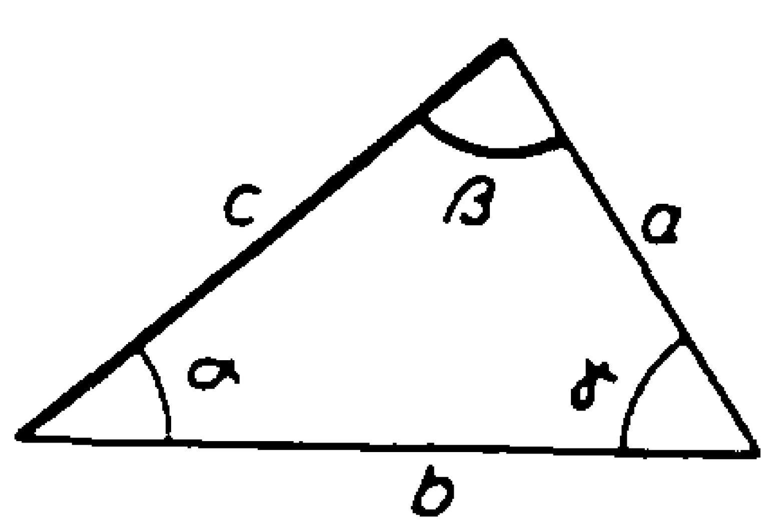
Tu je $s = \frac{a+b+c}{2}$ = poluopseg trokuta,

$\rho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ = polumjer trokutu upisane kružnice.

(Vidi primjer 4)

Primjeri:

1) Zadano: $c = 537{,}4$ m; $\alpha = 37^\circ\,15'\,42''$; $\beta = 79^\circ\,42'\,24''$.

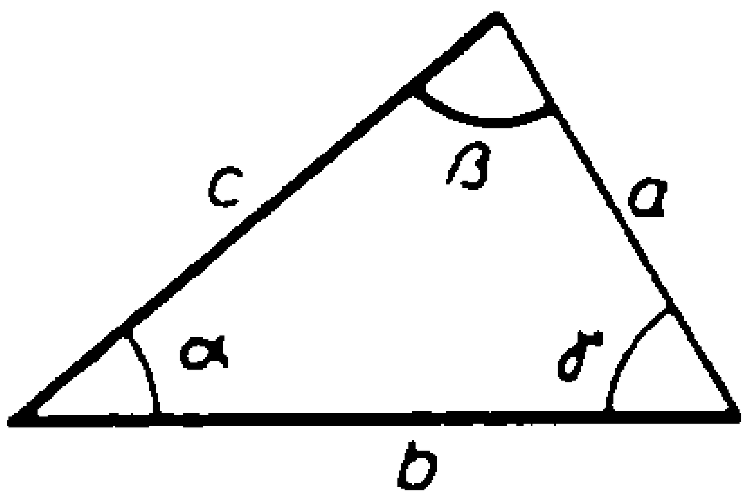


$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}, \qquad b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

$c = 537{,}4$	c	2,73030	I
	$\sin\gamma$	9,95001 − 10	II
$\alpha = 37^\circ\,15'\,42''$ $\beta = 79^\circ\,42'\,24''$	$\frac{c}{\sin\gamma}$	2,78029	I − II = III
$\alpha + \beta = 116^\circ\,58'\,06''$ $\gamma = 63^\circ\,01'\,54''$	$\sin\alpha$	9,78209 − 10	IV
$a = 365{,}08$ m	$\sin\beta$	9,99295 − 10	V
$b = 593{,}26$ m	a	2,56238	III + IV
	b	2,77324	III + V

2) Zadano: $b = 263{,}09$ m; $c = 215{,}40$ m; $\beta = 70^0\,14'\,42''$.

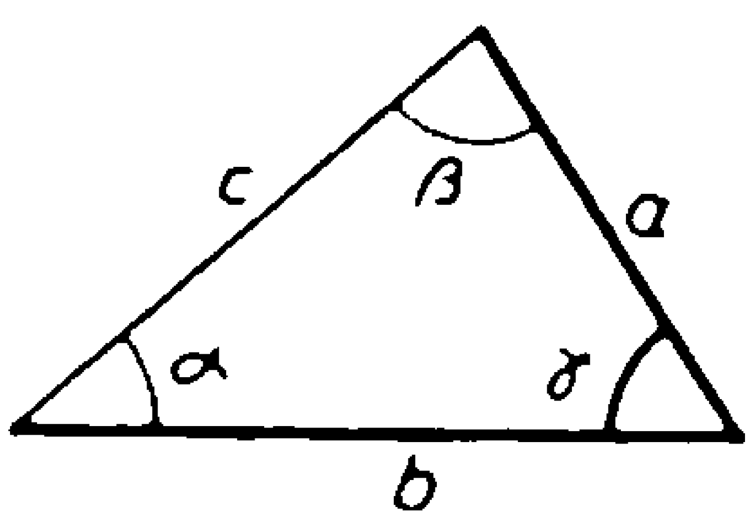


$$\sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\beta}{b} \qquad a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$$

$b = 263{,}09$ $c = 215{,}40$ $\beta = 70^0\,14'\,42''$ $\gamma = 50^0\,24'\,18''$	c $\sin\beta$	2,33325 9,97366—10	I II
	$c \cdot \sin\beta$ b	12,30691—10 2,42010	I + II = III IV
$\beta + \gamma = 120^0\,39'\,00''$ $\alpha = 59^0\,21'$ $a = 240{,}48$ m	$\sin\gamma$ b $\sin\alpha$	9,88681 – 10 2,42010 9,93465 – 10	III – V V VI
	$b \cdot \sin\alpha$ $\sin\beta$	2,35475 9,97366 – 10	V + VI = VII VIII
	a	2,38109	VII – VIII

3) Zadano: $a = 2033{,}9$ m; $b = 1123{,}1$; $\gamma = 72^0\,15'20''$.

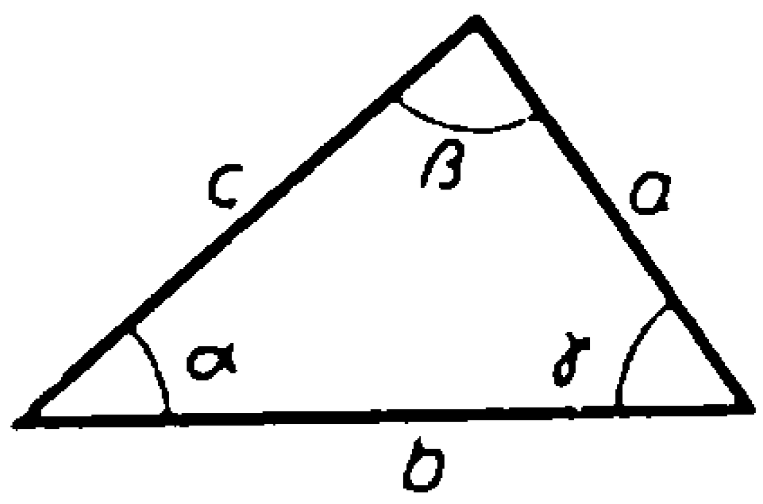


$$\operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{(a - b)\cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{a + b}$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2} \qquad c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$a = 2033{,}9$ $b = 1123{,}1$	$a - b$ $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$	2,95942 10,13670 – 10	I II
$a + b = 3157{,}0$ $a - b = 910{,}8$ $\gamma = 72^0\,15'\,20''$ $\frac{\gamma}{2} = 36^0\,07'\,40''$	Brojnik $a + b$	13,09612 – 10 3,49927	I + II = III IV
$\frac{\alpha + \beta}{2} = 53^0\,52'\,20''$ $\frac{\alpha - \beta}{2} = 21^0\,33'\,55''$	$\operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2}$ a $\sin\gamma$	9,59685 – 10 3,30833 9,97883 – 10	III – IV V VI
	Brojnik $\sin\alpha$	13,28716 – 10 9,98582—10	V + VI = VII VIII
$\alpha = 75^0\,26'\,15''$ $\beta = 32^0\,18'\,25''$ $\gamma = 72^0\,15'\,20''$ $c = 2001{,}4$ m	c	3,30134	VII – VIII

4) Zadano: $a = 235{,}3$ m; $b = 197{,}4$ m; $c = 186{,}3$ m.



$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\rho}{s-a} \qquad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\rho}{s-b} \qquad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\rho}{s-c}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}{s}} \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Pokus: $(s-a) + (s-b) + (s-c) = s$

$a = 235{,}3$ $b = 197{,}4$ $c = 186{,}3$	$s-a$ $s-b$ $s-c$	1,87040 2,04961 2,09061	I II III
$2s = 619{,}0$ $s = 309{,}5$	Brojnik s	6,01062 2,49066	I + II + III = IV V
$s-a = 74{,}2$ $s-b = 112{,}1$ $s-c = 123{,}2$	ρ^2 ρ	3,51996 1,75998	IV − V = VI VI : 2 = VII
Pokus: $309{,}5 = s$	$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$	9,88958 − 10	VII − I
$\frac{\alpha}{2} = 37^0\,47'\,36''$	$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$	9,71037 − 10	VII − II
$\frac{\beta}{2} = 27^0\,10'\,17''$	$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$	9,66937 − 10	VII − III
$\frac{\gamma}{2} = 25^0\,02'\,07''$			
Pokus: $90^0\,00'\,00''$ $\alpha = 75^0\,35'\,12''$ $\beta = 54^0\,20'\,34''$ $\gamma = 50^0\,04'\,14''$			

2. Složeni slučajevi rješavanja trokuta. Mollweideove jednadžbe

Ako je u trokutu zadan jedan kut, jedna stranica i zbroj ili razlika drugih dviju stranica (npr. γ, c, $a + b = l$ ili $a - b = d$), služimo se prvom ili drugom Mollweideovom jednadžbom.

Prema (42):

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \\ \frac{b}{c} &= \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \end{aligned}\right| + \tag{a}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma},$$

odatle prema (30) i (22):

$$\frac{a+b}{c}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}\text{, a kako je}\frac{\alpha+\beta}{2}=90^{0}-\frac{\gamma}{2}\text{, pa je}$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2},$$

dobivamo:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\ \cos\frac{\gamma}{2}}$$

ili:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}. \tag{49}$$

To je prva Mollweideova jednadžba.

Slično:

$$\frac{b+c}{a}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\quad\text{itd.}$$

Na sličan način, oduzimajući od prve jednadžbe sustava (a) drugu jednadžbu, dobiva se druga Mollweideova jednadžba:

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \tag{50}$$

Slično:

$$\frac{b-c}{a}=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\quad\text{itd.}$$

Primjedbe:

1) Prva Mollweideova jednadžba upotrebljava se također za pokusno rješavanje trokuta, koji su riješeni po sinusovom poučku. Kadšto se

trokut, u kojem je zadana jedna stranica i dva kuta, neposredno rješava po toj jednadžbi.

2) Mollweideove jednadžbe možemo primijeniti i na rješavanje složenih zadataka o pravokutnim trokutima, npr. ako je zadana hipotenuza c i zbroj $a + b = l$ ili razlika $a - b = d$ obiju kateta trokuta.

Kako je u tom slučaju $\gamma = 90^0$, pa je $\sin \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\gamma}{2} = \sin 45^0 =$

$= \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, Mollweideove jednadžbe za pravokutni trokut primaju oblik:

$$\frac{a+b}{c} = \sqrt{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \tag{49a}$$

$$\frac{a-b}{c} = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \tag{50a}$$

§ 15. PLOŠTINA TROKUTA

Ploština se trokuta određuje kako slijedi:

1) Kako je ploština trokuta $P = \frac{1}{2} b \cdot v_b$ a $v_b = a \cdot \sin\gamma$ (vidi sl. 57) dobiva se:

$$P = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$$

Slično:

$$P = \frac{1}{2} bc \sin\alpha \qquad (51)$$

$$P = \frac{1}{2} ca \sin\beta$$

To znači:

Ploština trokuta jednaka je polovini umnoška dviju stranica i sinusa kuta između njih.

2) Uvrštenje $b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}$ (sinusov poučak) u prvu formulu (51) daje:

$$P = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha} = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin(\beta + \gamma)}$$

Slično:

$$P = \frac{b^2 \cdot \sin\gamma \sin\alpha}{2 \sin\beta} = \frac{b^2 \cdot \sin\gamma \sin\alpha}{2 \sin(\gamma + \alpha)} \qquad (52)$$

$$P = \frac{c^2 \cdot \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin\gamma} = \frac{c^2 \cdot \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}$$

3) Ako su zadane stranice trokuta, njegova se ploština računa po Heronovoj formuli:

$$P = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}, \qquad (53)$$

gdje je:

$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$

4) Iz treće jednadžbe sustava (43) slijedi:

$\sin \gamma = \frac{c}{2r}$, a uvrštenje tog izraza u (51) daje:

$$P = \frac{abc}{4r}, \tag{54}$$

gdje je r polumjer kružnice opisane oko trokuta.

5) Prema formuli (d) pređašnjeg §-a (vidi str. 156) imali smo već:

$$P = \varrho \cdot s, \tag{55}$$

gdje je ϱ polumjer trokutu upisane kružnice, pri čemu je prema (48)

$$\rho = (s - a) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = (s - b) \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = (s - c) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}, \tag{55a}$$

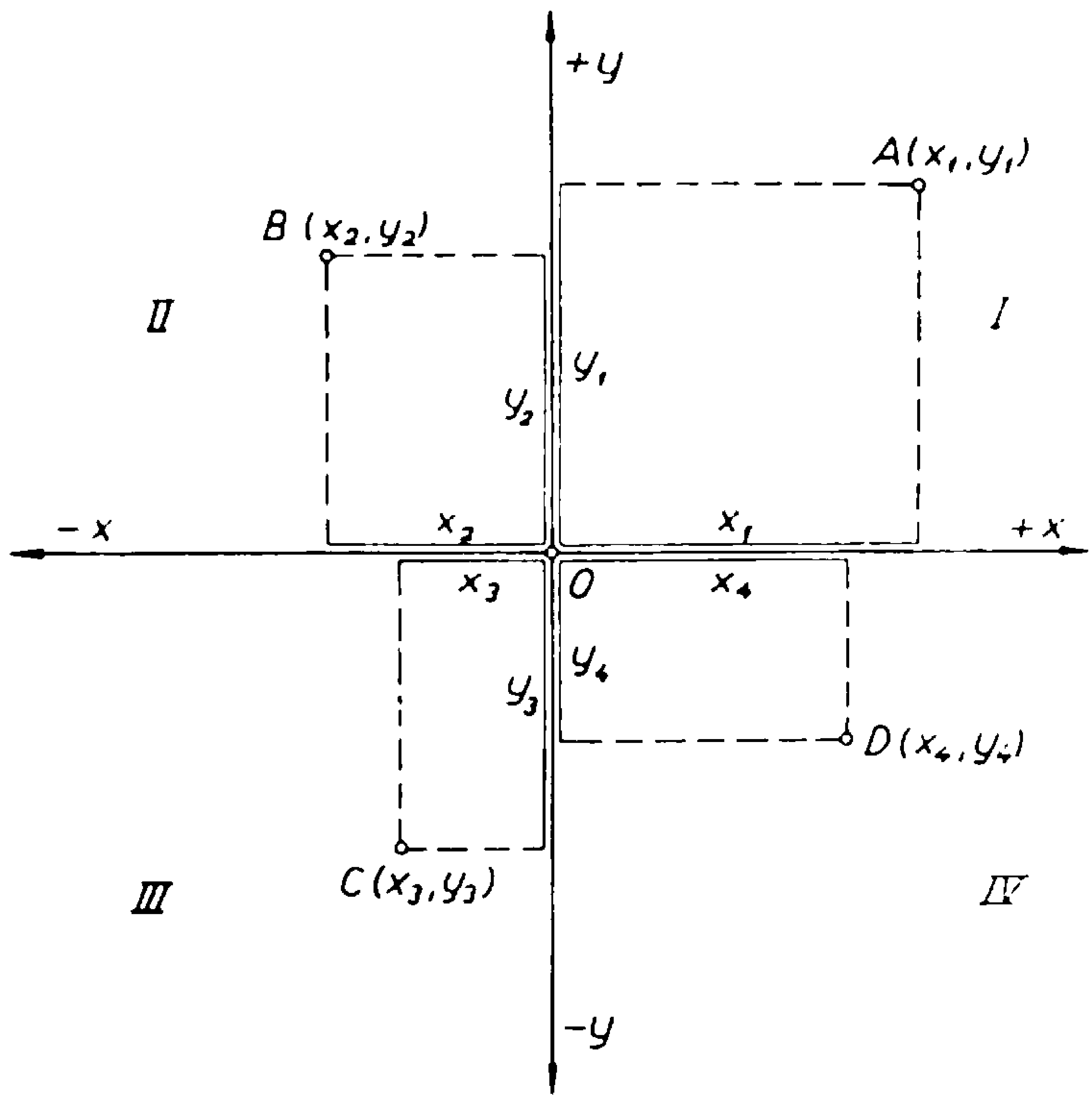
a s je poluopseg toga trokuta:

$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$

IV. ANALITIČKA GEOMETRIJA U RAVNINI

§ 1. KOORDINATNI SUSTAVI I NJIHOVA VEZA

1. PRAVOKUTNI KOORDINATNI SUSTAV



Sl. 60

Pravokutni koordinatni sustav određen je:

1) apscisnom osi ili osi x,
2) ordinatnom osi ili osi y,
3) presjecištem pod kutom od 90^0 tih osi ili ishodištem koordinatnog sustava O (origo),
4) orijentacijom koordinatnog sustava, tj. smislom koji je protivan okretanju kazaljke na satu. To je najkraći put po kojem os $+x$ prelazi u os $+y$.

(U geodeziji koordinatna os, koja je na sl. 60 označena sa $+y$, nosi oznaku $+x$, a os $+x$ označena je sa $+y$, pa koordinatni sustav ima obratnu orijentaciju.)

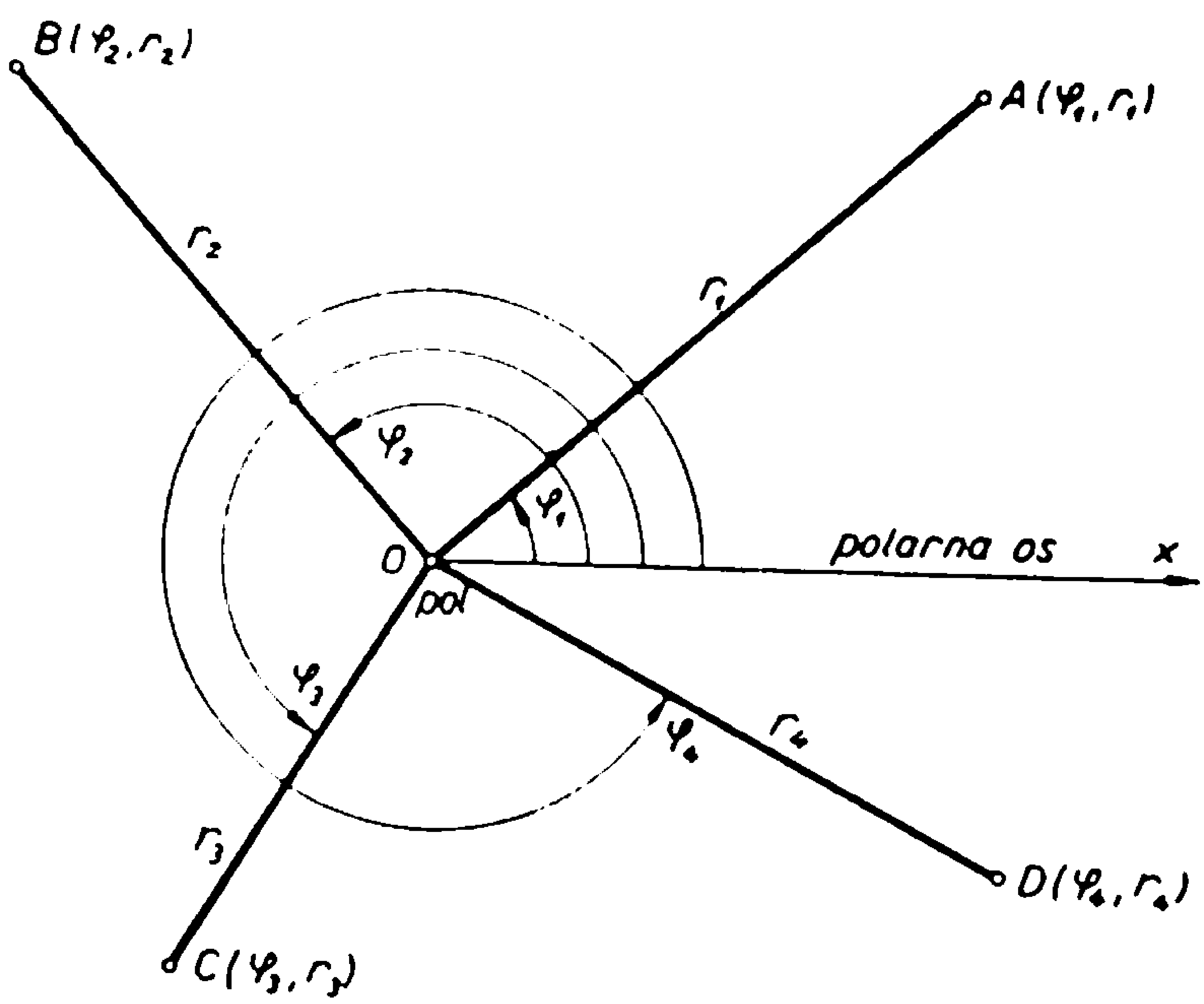
Položaj tačke u ravnini jednoznačno je određen kad je poznata udaljenost tačke od osi y, tj. apscisa x, i udaljenost tačke od osi x, tj. ordinata y. x i y su pravokutne koordinate tačke.

Tačke koje leže nadesno od osi y imaju pozitivne apscise (tačke A i D), a one koje leže nalijevo imaju negativne apscise (tačke B i C). Tačke koje leže iznad osi x imaju pozitivne ordinate (tačke A i B), a one ispod nje imaju negativne ordinate (tačke C i D). Iz toga slijedi shema predznaka obiju koordinata u pojedinim kvadrantima.

Kvadrant	Predznak	
	x	y
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−

(Navedena shema predznaka vrijedi i za koordinatni sustav koji se primijenjuje u geodeziji, jer se tamo uzima da tačke, koje leže nadesno od osi x i iznad osi y imaju pozitivne apscise i pozitivne ordinate.)

2. POLARNI KOORDINATNI SUSTAV



Sl. 61

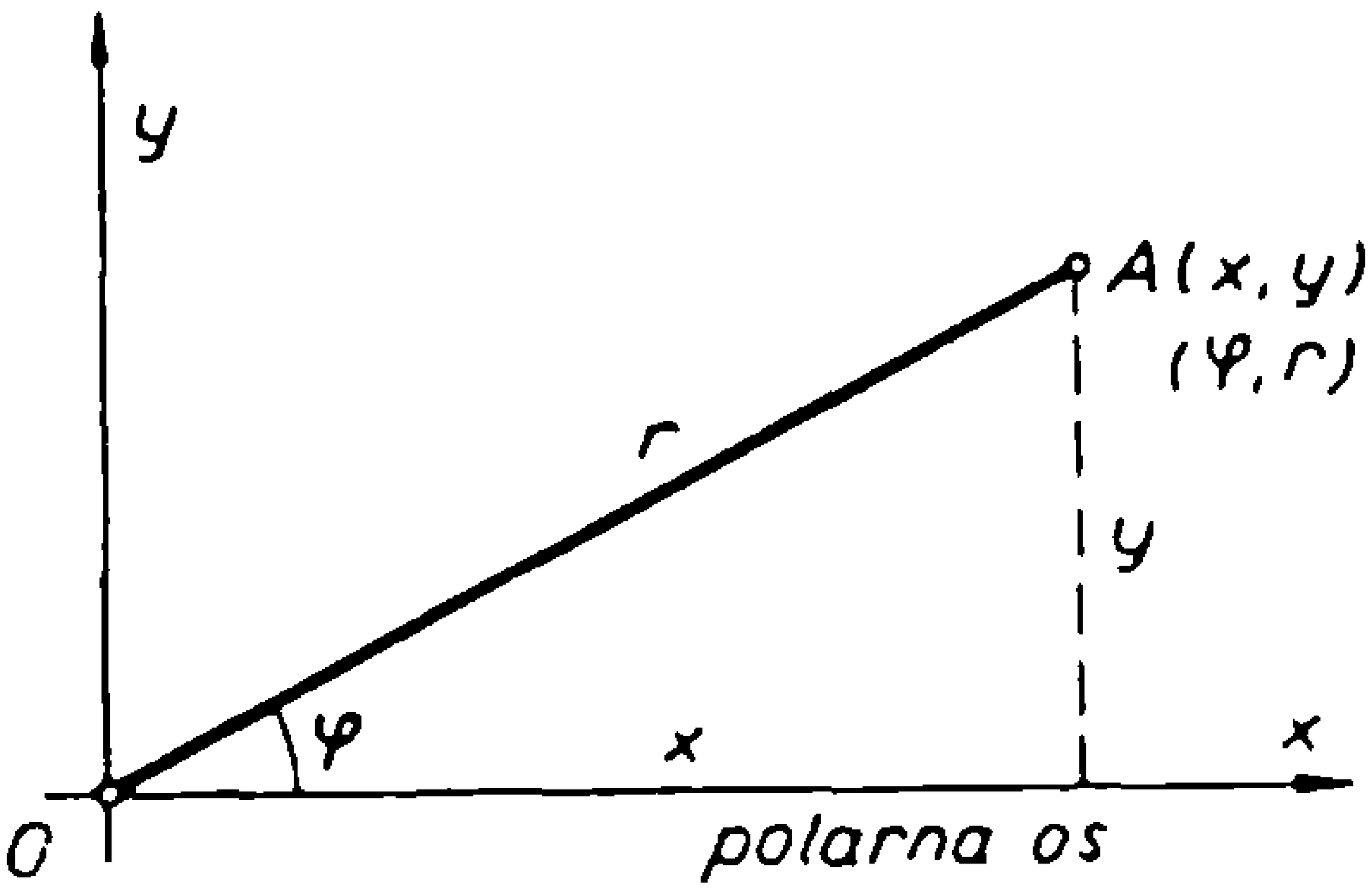
On je zadan:

1) polom O,
2) polarnom osi Ox.

Položaj tačke u ravnini jednoznačno je određen kad je poznata udaljenost tačke od pola, tj. radij-vektor r, i kut koji radij-vektor zatvara s polarnom osi, tj. amplituda ili polarni kut φ.

Radij-vektor r uvijek je pozitivan i može primiti sve vrijednosti od 0 do $+\infty$, a amplituda φ smatra se pozitivnom kad se kut φ računa u smislu koji je protivan smislu vrtnje kazaljke na satu, inače je negativan; stoga se φ mijenja od $-\infty$ do $+\infty$. Svakoj tački ravnine pripada jedan radij-vektor r, a beskonačno mnogo kutova φ, koji se razlikuju za mnogokratnik od 360^0. Radi jednostavnosti uzimaju se obično za φ vrijednosti koje leže između 0 i 360^0. φ i r su **polarne koordinate tačke.**

3. VEZA IZMEĐU POLARNIH I PRAVOKUTNIH KOORDINATA



Sl. 62

Iz slike 62 slijedi:

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\varphi \\ y &= r \cdot \sin\varphi \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

Obrnuti prelaz.

Prema toj slici imamo:

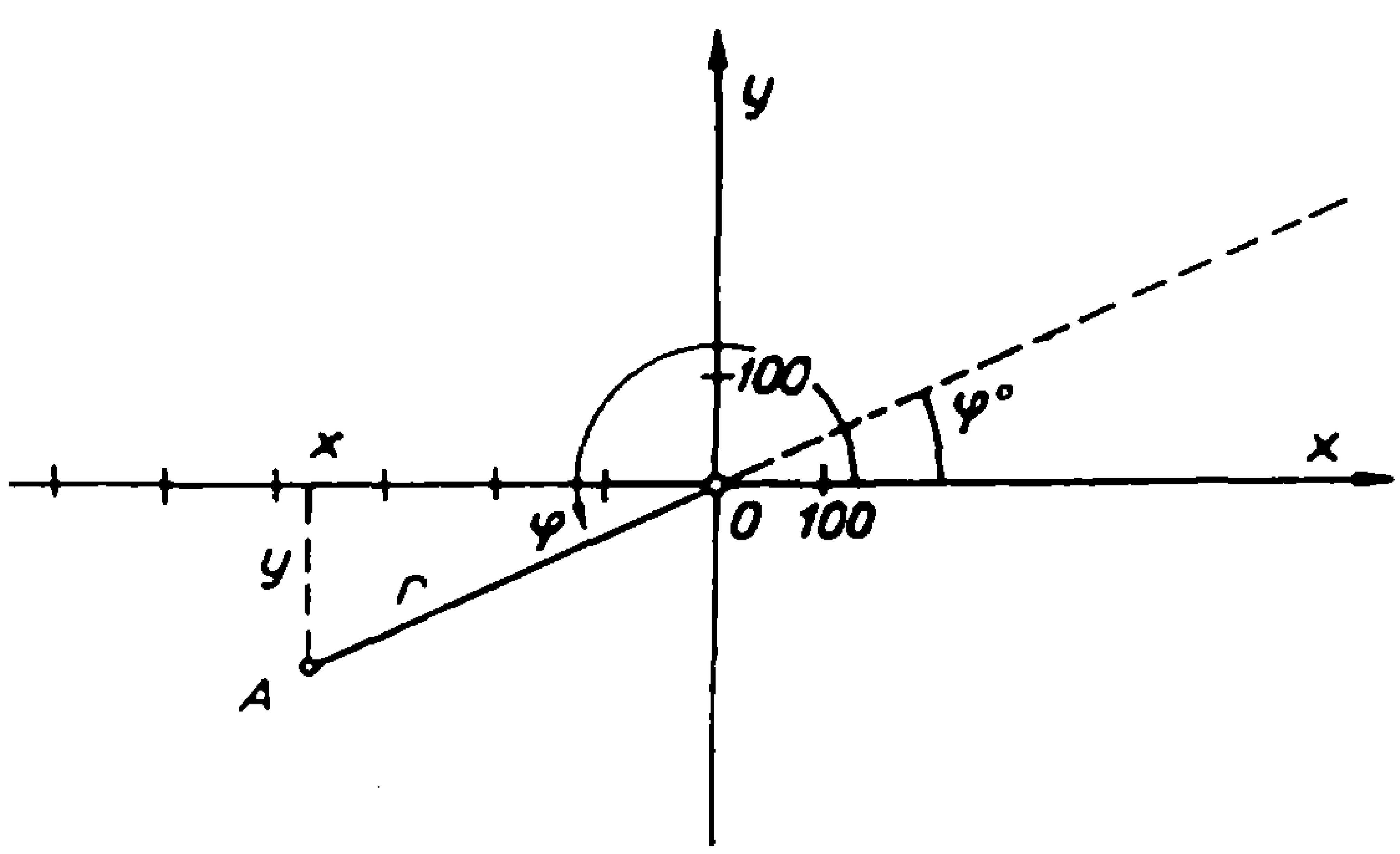
$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{y}{x} \\ r &= +\sqrt{x^2+y^2}\,. \\ r &= \frac{x}{\cos\varphi} = \frac{y}{\sin\varphi} \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

ili prema (1):

Kvadrant u kojem leži traženi kut φ određujemo ili prema slici ili prema predznacima zadanih koordinata x i y (vidi tablicu na str. 165).

Kako je radij-vektor r uvijek pozitivan, možemo r izračunati po formuli:

$$r = \frac{|x|}{\cos\varphi_0} = \frac{|y|}{\sin\varphi_0}\,, \qquad (2a)$$



Sl. 63

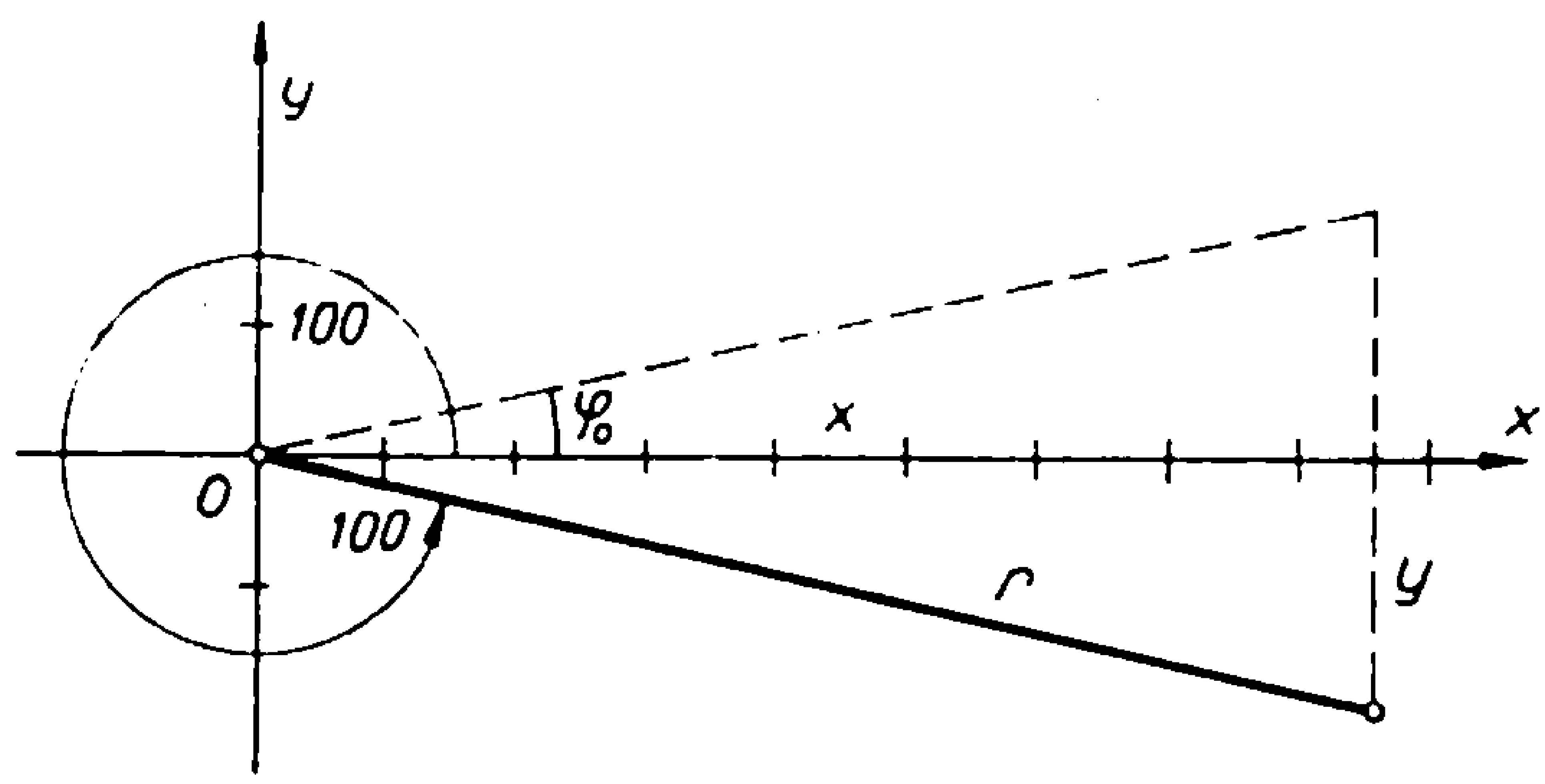
gdje je φ_0 pripadni kut u I kvadrantu, a $|x|$ i $|y|$ apsolutne vrijednosti koordinata tačke.

Primjer 1:

Zadane su polarne koordinate tačke A ($\varphi = 203^0\,35'\,05''$, $r = 421{,}63$ m). Treba izračunati pravokutne koordinate te tačke (sl. 63)!

$\varphi = 230^0\,35'\,05''$		$r = 421{,}63$ m	
$x = r \cdot \cos\varphi$		$y = r \cdot \sin\varphi$	
$\cos\varphi$ r $\sin\varphi$	$-\cos 23^0\,35'\,05''$ 421,63 $-\sin 23^0\,35'\,05''$	n 9,96213—10 2,62493 n 9,60217—10	I III II
x y	$-$ 386,42 m $-$ 168,69 m	2,58706 2,22710	I + III III + II

Rimski brojevi u krajnjem desnom stupcu tablice pokazuju redoslijed računanja.



Sl. 64

Primjer 2:

Zadane su pravokutne koordinate tačke B ($x = 863{,}08$ m, $y = -193{,}51$ m). Treba izračunati polarne koordinate te tačke (sl. 64)!

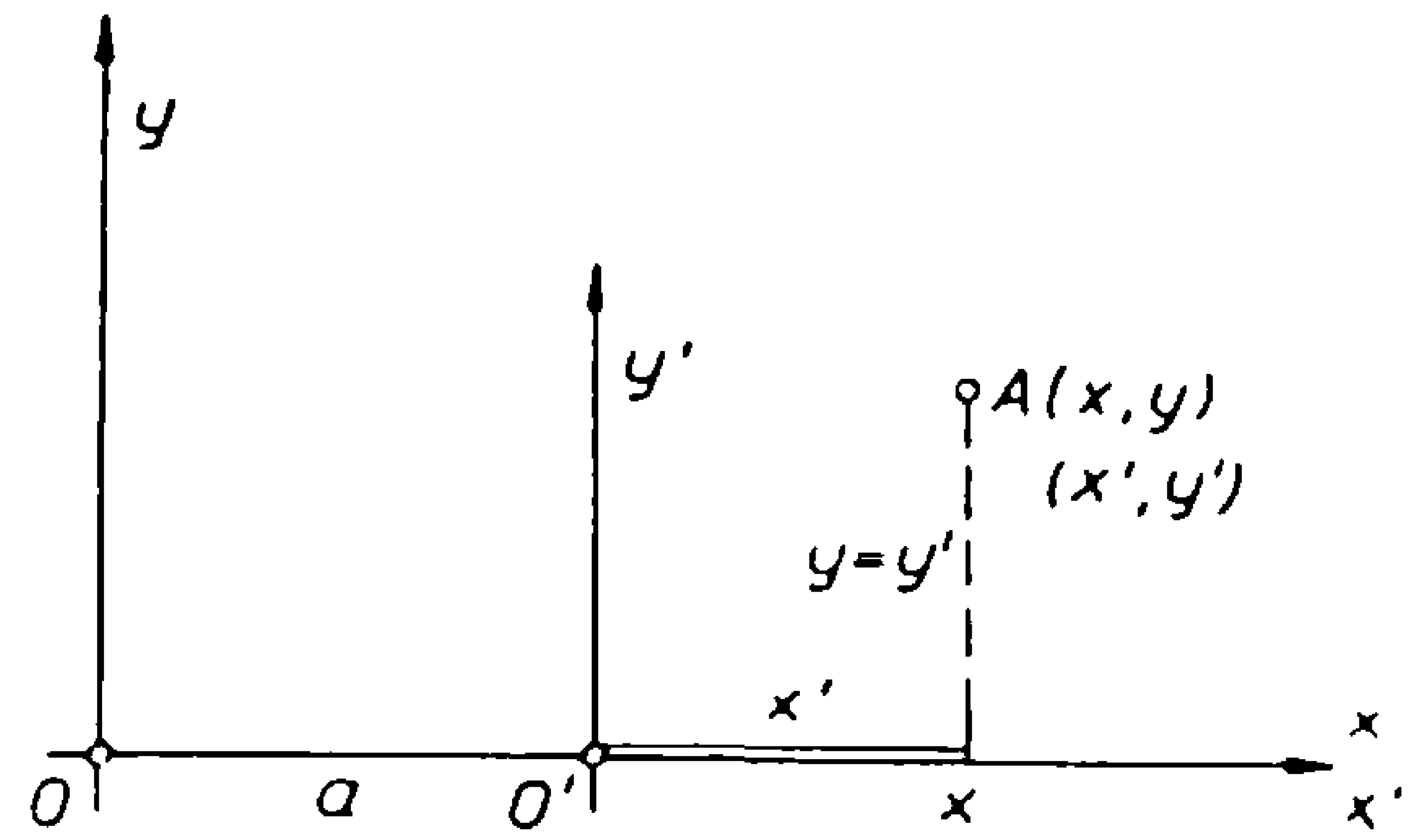
$x = 863{,}08$ m		$y = -193{,}51$ m	
$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$	$r = \dfrac{\mid x \mid}{\cos\varphi_0} = \dfrac{\mid y \mid}{\sin\varphi_0}$		
 y $\sin\varphi_0$ $\cos\varphi_0$ x	 $-$ 193,51 $\sin 12^0\,38'\,14''$ $\cos 12^0\,38'\,14''$ 863,08	+ 10 —10 n 2,28670 9,34000—10 9,98935—10 2,93605	 I V VI II
$\operatorname{tg}\varphi_0$ φ_0 $\varphi = 360 - \varphi_0$ r	 $12^0\,38'\,14''$ $347^0\,21'\,46''$ 884,50 m	n 9,35065—10 2,94670	I—II III IV I—V, II—VI

§ 2. TRANSFORMACIJE PRAVOKUTNIH KOORDINATA

1. TRANSLACIJA TJ. USPOREDNI POMAK ZA DUŽINU a KOORDINATNOG SUSTAVA XOY DUŽ OSI X U POLOŽAJ $X'O'Y'$

Neka su x, y koordinate tačke A s obzirom na koordinatni sustav XOY, a

x', y' koordinate iste tačke A s obzirom na koordinatni sustav $X'O'Y'$.



Sl. 65

Prema slici 65: O' $(a, 0)$,

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y'. \end{aligned}\right| \qquad (3)$$

Odatle:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y. \end{aligned}\right| \qquad (3a)$$

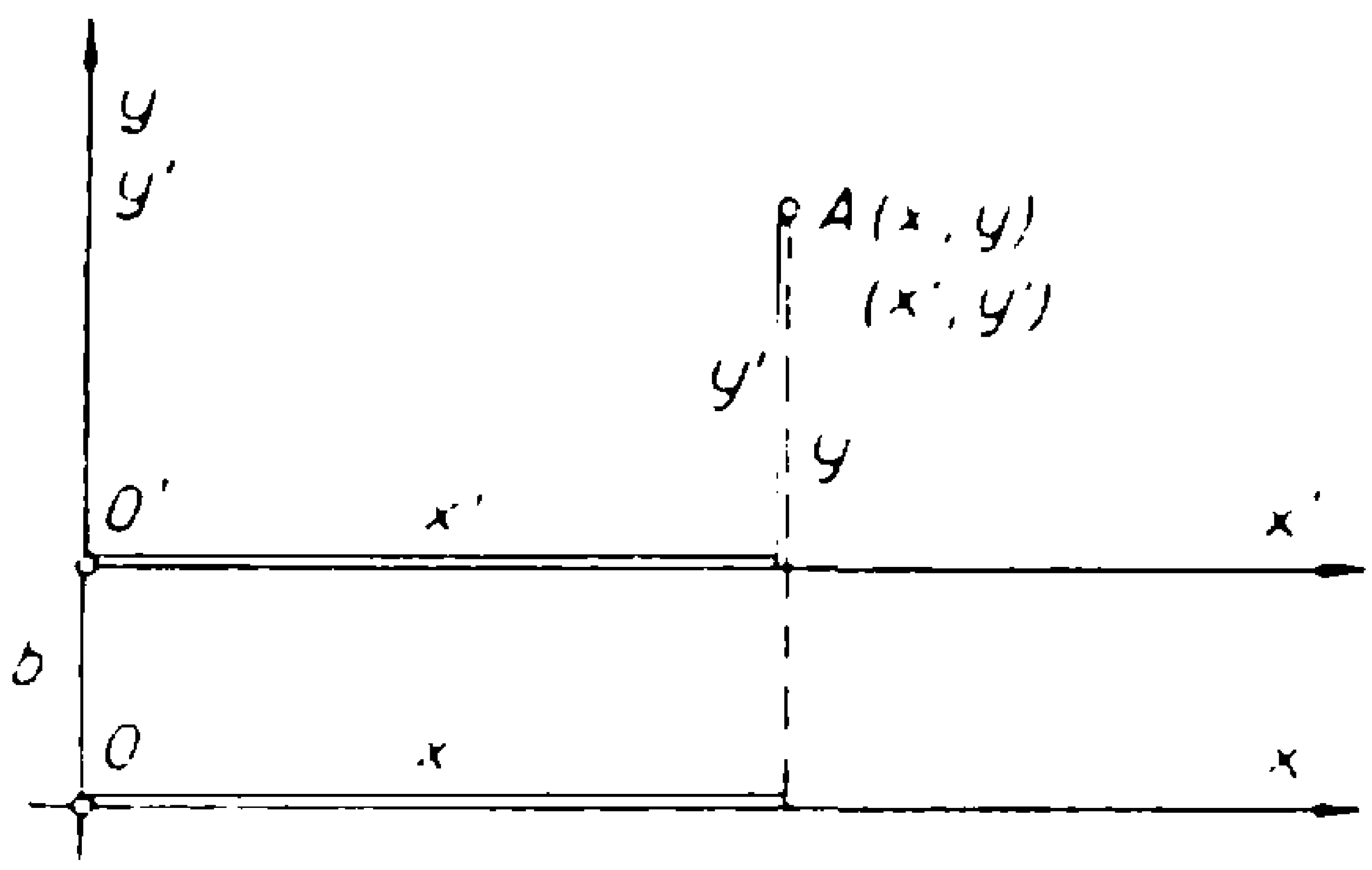
2. TRANSLACIJA ZA DUŽINU b KOORDINATNOG SUSTAVA XOY DUŽ OSI Y U POLOŽAJ $X'O'Y'$

Prema slici 66: O' $(0, b)$,

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' + b \end{aligned}\right| \qquad (4)$$

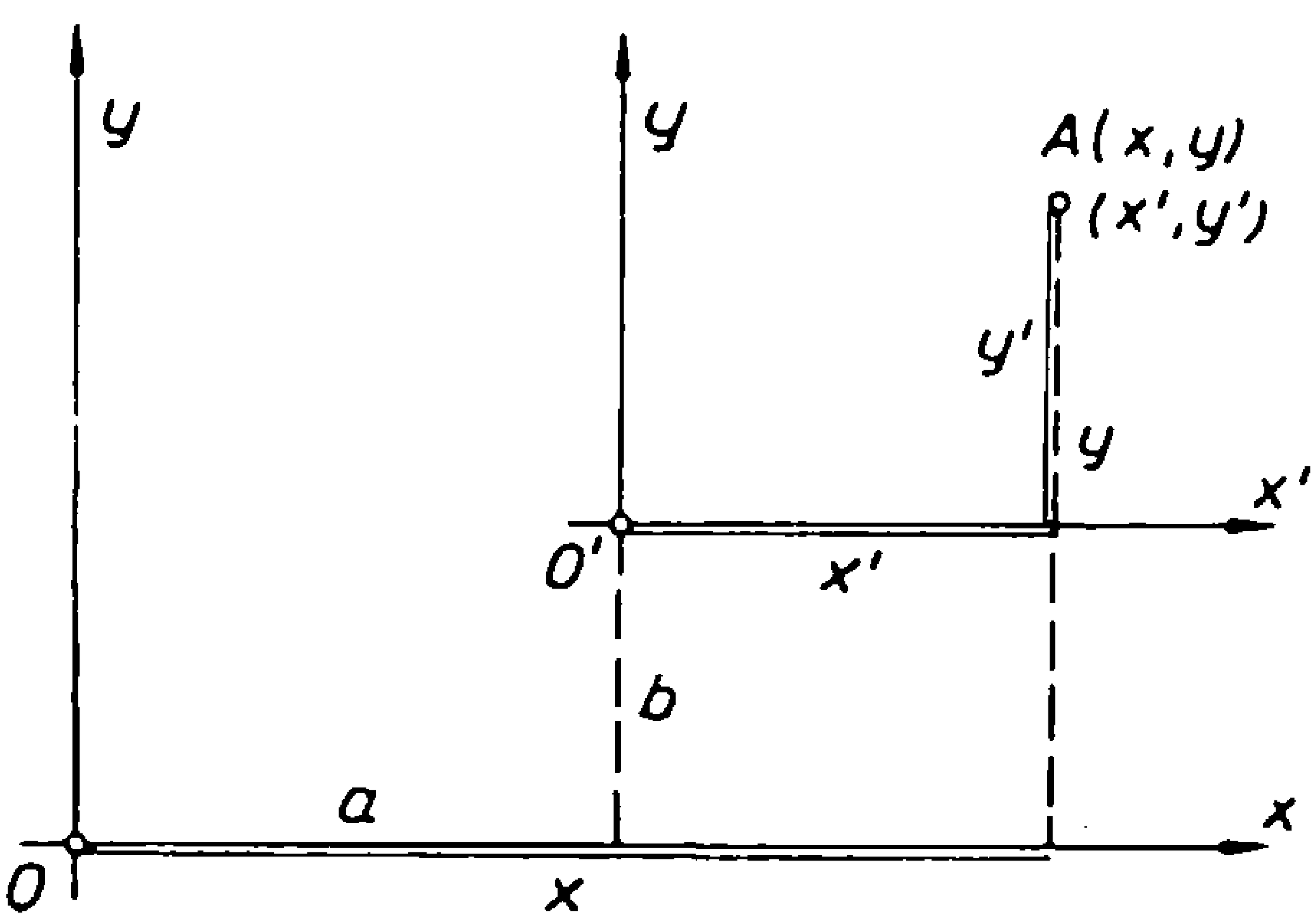
Odatle:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y - b \end{aligned}\right| \qquad (4a)$$



Sl. 66

3. TRANSLACIJA KOORDINATNOG SUSTAVA XOY DUŽ OSI X ZA DUŽINU a I DUŽ OSI Y ZA DUŽINU b U POLOŽAJ $X'O'Y'$ (sastavljanje slučajeva 1 i 2)



Sl. 67

Prema slici 67:

O' (a, b),

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

Odatle:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y - b \end{aligned}\right| \qquad (5a)$$

4. VRTNJA KOORDINATNOG SUSTAVA XOY OKO ISHODIŠTA O ZA KUT α U POLOŽAJ $X'O'Y'$

Traže se koordinate x i y tačke A s obzirom na koordinatni sustav XOY, ako su poznate koordinate x' i y' iste tačke A s obzirom na koordinatni sustav $X'OY'$, koji je zaokrenut prema prvome za kut α.

Prema slici 68:

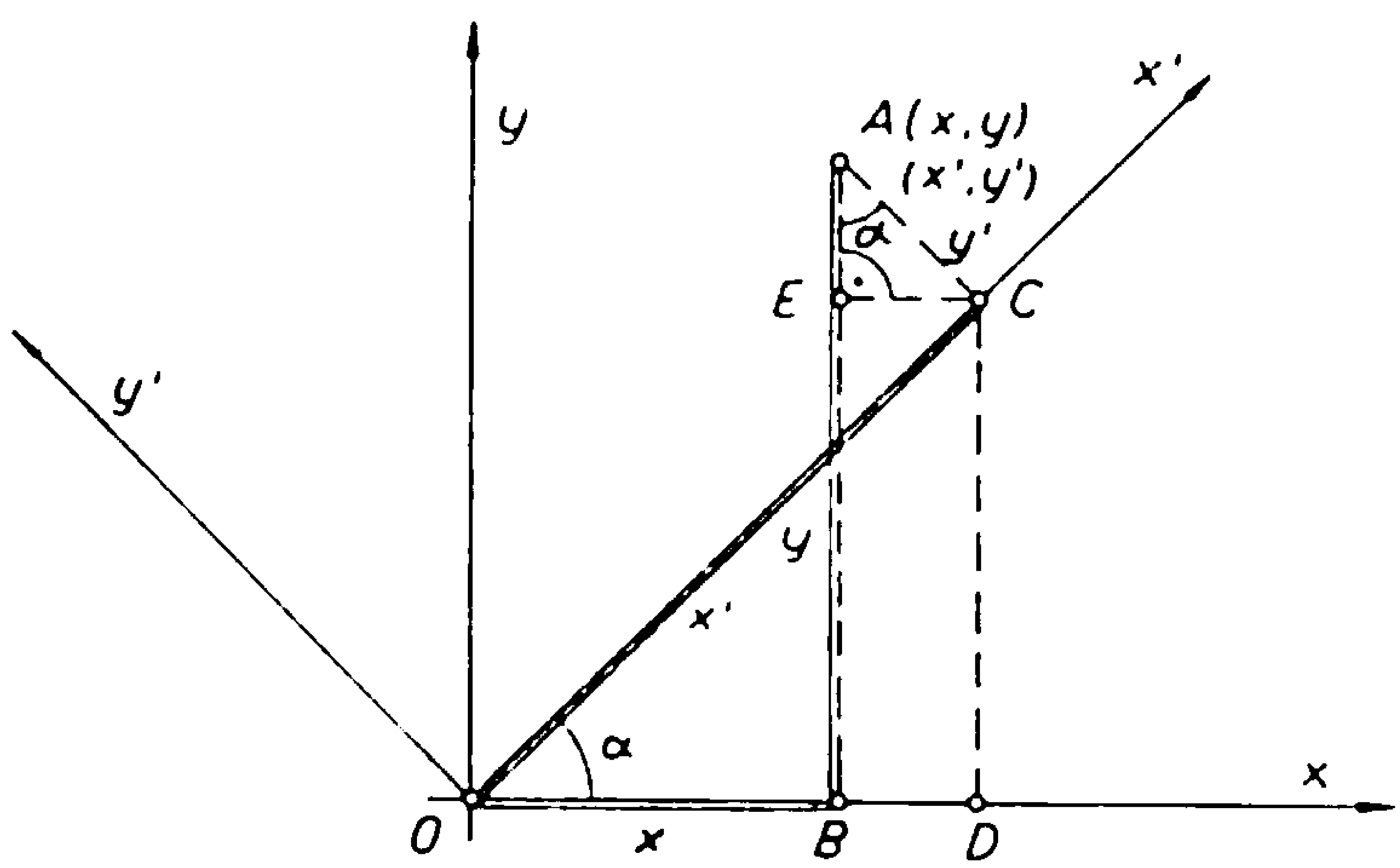
$$x = OD - BD = OD - EC$$

$$y = BE + EA = CD + EA$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned}\right|$$

Iz tog sustava lako se dobiju formule za x' i y' izražene pomoću x i y, ako se sustav (6) riješi po x' i y' (najzgodnije metodom determinanata) ili ako se mjesto α uvrsti $(-\alpha)$:

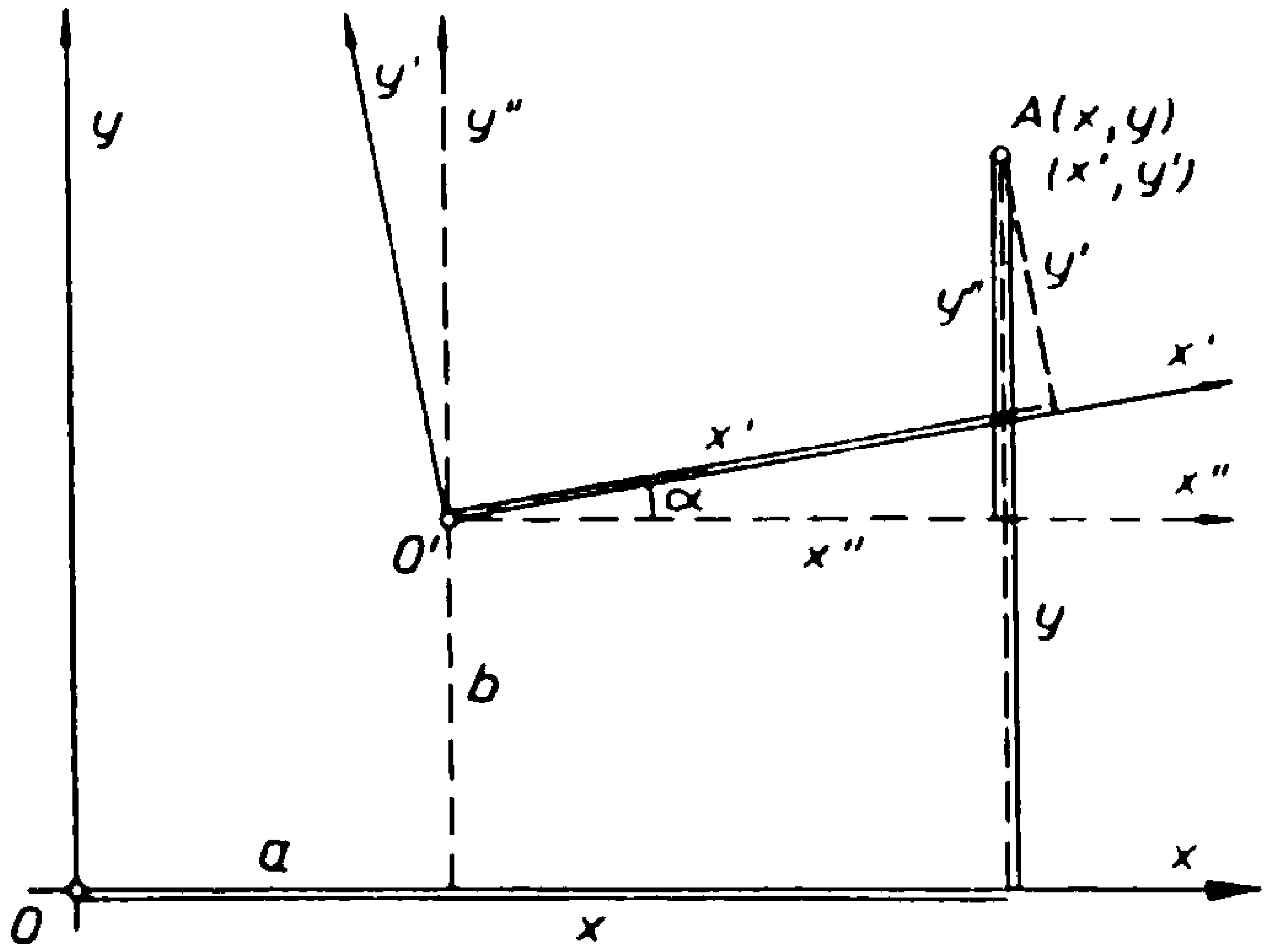
$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \alpha \\ y' &= -x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \end{aligned}\right| \qquad (6a)$$



Sl. 68

5. TRANSLACIJA KOORDINATNOG SUSTAVA XOY DUŽ OSI X ZA DUŽINU a I DUŽ OSI Y ZA DUŽINU b I VRTNJA TOGA NOVOG SUSTAVA ZA KUT α OKO ISHODIŠTA O' U POLOŽAJ $X'O'Y'$ (sastavljanje slučajeva 3 i 4)

Uzmemo li treći pomoćni koordinatni sustav $X''O'Y''$, tada s obzirom na jednadžbe (5) i (6) dobivamo prema slici 69:



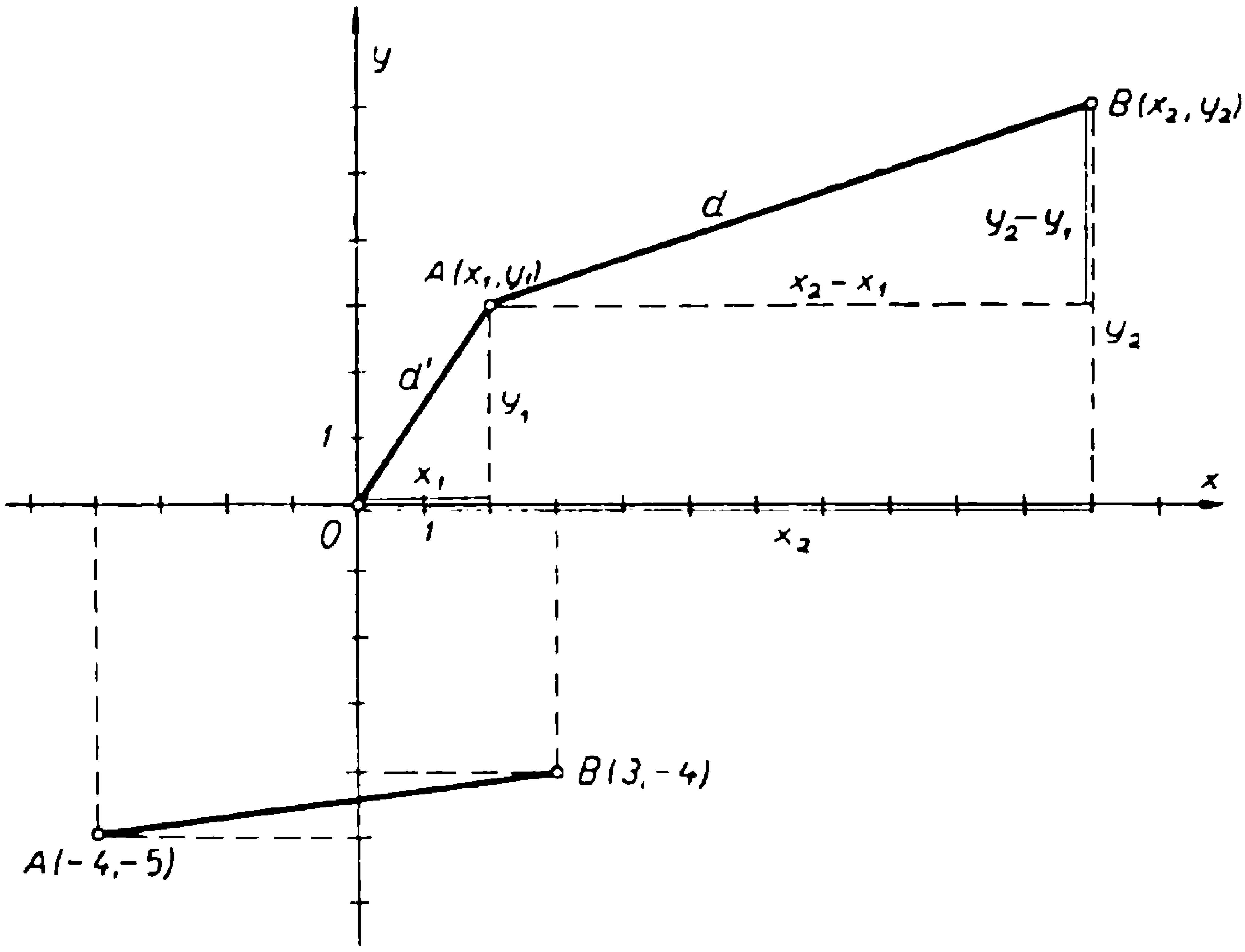
Sl. 69

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' \cdot \cos\alpha - y' \cdot \sin\alpha \\ y &= b + x' \cdot \sin\alpha + y' \cdot \cos\alpha \end{aligned}\right| \qquad (7)$$

a s obzirom na jednadžbe (5a) i (6a) imamo:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \quad (x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha \\ y' &= -(x - a)\sin\alpha + (y - b)\cos\alpha \end{aligned}\right| \qquad (7a)$$

§ 3. UDALJENOST DVIJU TAČAKA



Sl. 70

Prema slici 70 imamo po Pitagorinom poučku:

$$d = + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{8}$$

P o s e b a n s l u č a j :

Udaljenost tačke A (x_1, y_1) od ishodišta O $(0, 0)$:

$$d' = + \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \tag{8a}$$

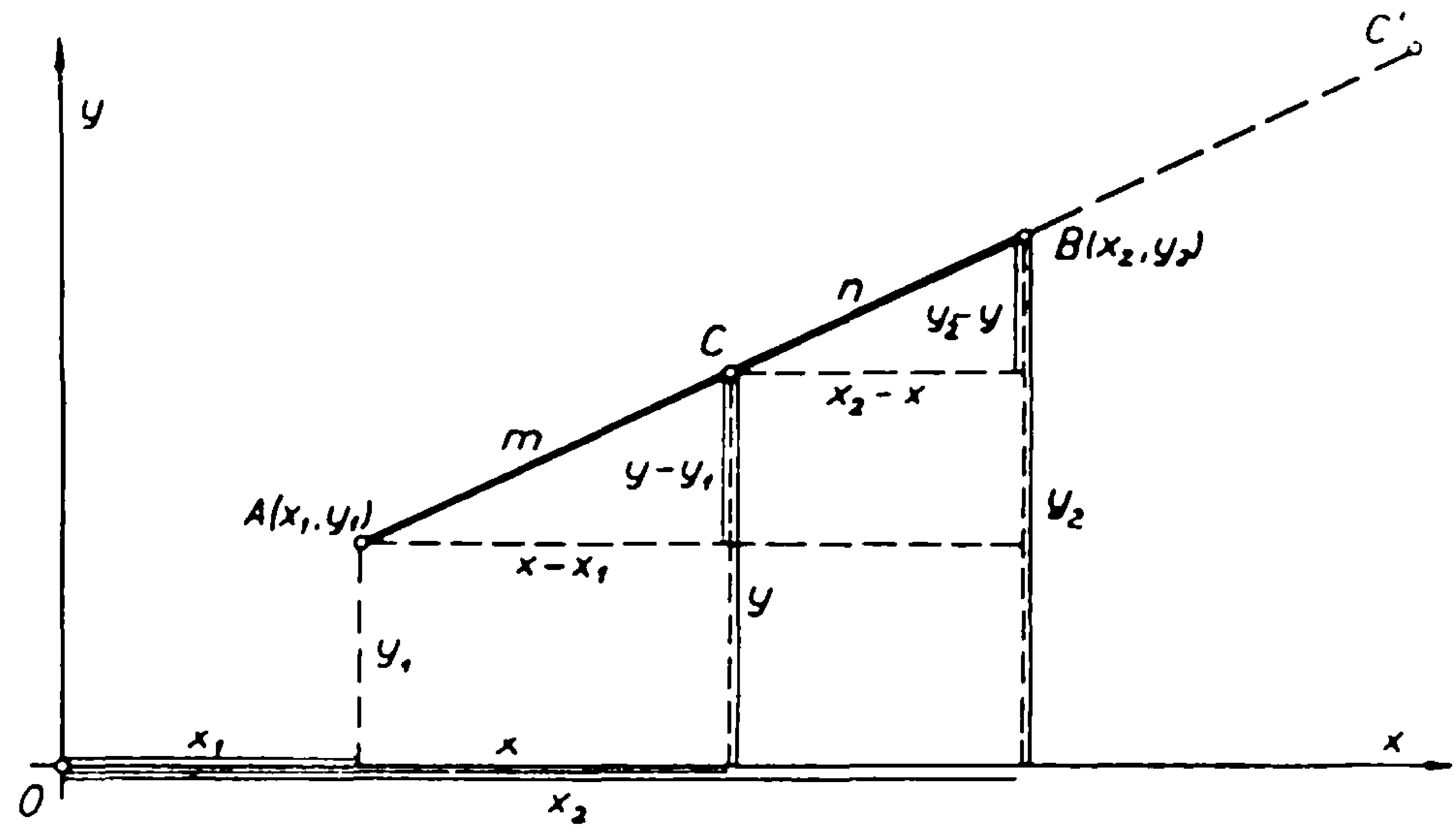
Primjer:

$$A\,(-4, -5): \quad B\,(3, -4)$$

$$d = \sqrt{(-4-3)^2 + (-5+4)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 7{,}071\ldots$$

(vidi sl. 70).

§ 4. KOORDINATE TAČKE KOJA DIJELI ZADANU DUŽINU U ZADANOM OMJERU $m : n$



Sl. 71

Zadano: $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$, $CA : CB = m : n$.

Traži se: $C(x, y)$.

Iz sličnosti pravokutnih trokuta slijedi prema slici 71:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n} \quad \text{i} \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m}{n}.$$

Označimo li zadani omjer $m : n = \frac{m}{n}$ s λ, dobivamo odatle:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad \text{i} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \tag{9}$$

gdje je: $$\lambda = \frac{m}{n}.$$

P o s e b a n s l u č a j.

Tačka $C(x, y)$ raspolavlja dužinu AB, tj. $\lambda = \frac{m}{n} = \frac{1}{1} = 1$.

Uvrštenje $\lambda = 1$ u (9) daje:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2}. \end{aligned} \right| \qquad (10)$$

To znači:

K o o r d i n a t e t a č k e k o j a r a s p o l a v l j a z a d a n u d u ž i n u a r i t m e t i č k e s u s r e d i n e k o o r d i n a t a k r a j n j i h t a č a k a t e d u ž i n e.

Traže li se koordinate tačke C, koja leži na produženju dužine AB, a dijeli je u omjeru $\lambda = \frac{m}{n}$ i z v a n a, treba u formulama (9) uzeti λ s negativnim predznakom, pri čemu $\lambda = \frac{m}{n} = \frac{C'A}{C'B}$.

Pazi! Pri postavljanju omjera $\frac{m}{n} = \lambda$ uvijek polazi od t r a ž e n e tačke.

Npr. za $A(1, 2)$, $B(5, 4)$ i $\lambda = \frac{C'A}{C'B} = \frac{7}{3}$ dobivamo prema (9) za koordinate tačke C' uzevši $-\lambda$ mjesto λ:

$$x = \frac{1 - \frac{7}{3} \cdot 5}{1 - \frac{7}{3}} = \underline{8}$$

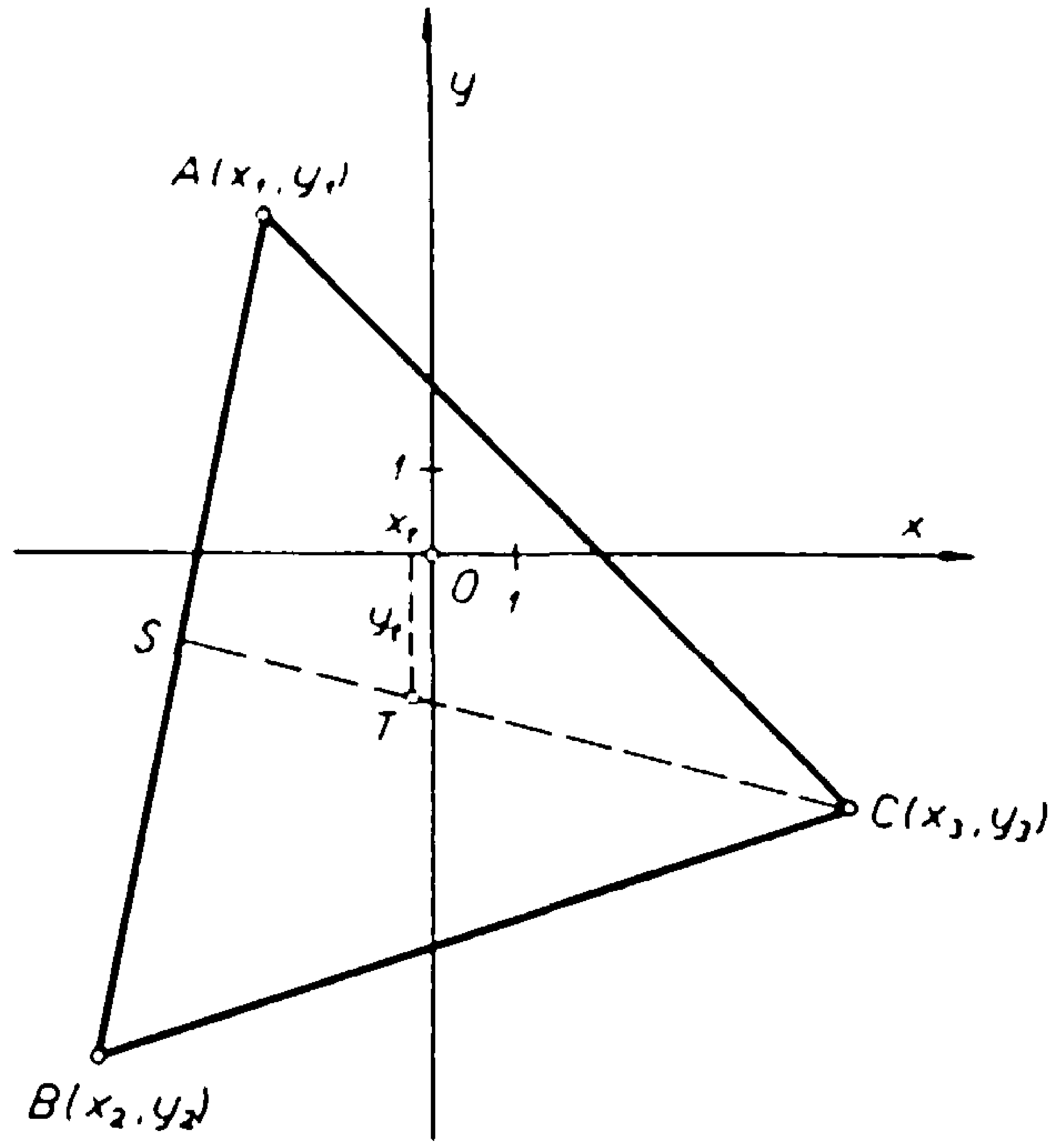
$$y = \frac{2 - \frac{7}{3} \cdot 4}{1 - \frac{7}{3}} = \underline{5{,}5.}$$

Da pokažemo primjenu formule (10), riješit ćemo važan zadatak:

Neka se odrede koordinate težišta T trokuta, kojemu su vrhovi $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$.

Težište T dijeli težišnicu, tj. spojnicu vrha trokuta, npr. B sa sredinom S suprotne stranice AC u omjeru $1:2$, računajući od te stranice.

Dakle prema slici 72:



Sl. 72

$$AS = SB \quad \text{i} \quad TS : TC = 1 : 2, \quad \text{pa je} \quad \lambda = \frac{1}{2}.$$

Prema (10) koordinate tačke S glase:

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y_s = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

a prema (9) koordinate težište T jesu:

$$x_t = \frac{x_s + \frac{1}{2} x_3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2x_s + x_3}{3}$$

$$y_t = \frac{y_s + \frac{1}{2} y_3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2y_s + y_3}{3}. \qquad \text{(b)}$$

Uvrštenje izraza (a) u (b) daje:

$$\left.\begin{aligned} x_t &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y_t &= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} . \end{aligned}\right| \qquad (11)$$

K o o r d i n a t e t e ž i š t a t r o k u t a j e s u a r i t m e t i č k e s r e d i n e k o o r d i n a t a v r h o v a t o g a t r o k u t a.

Npr. za $A(-2, 4)$, $B(-4, -6)$, $C(5, -3)$, (vidi sliku 72 koja predočuje taj trokut):

$$x_t = \frac{-2 + 5 - 4}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$y_t = \frac{4 - 3 - 6}{3} = -\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3} .$$

§ 5. PLOŠTINA TROKUTA

Traži se ploština P trokuta kome su vrhovi $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$.

Iz slike 73 vidimo:

$P = pl.$ trapeza $AA'C'C + pl.$ trapeza $CC'B'B - pl.$ trapeza $AA'B'B =$

$$= \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1).$$

Nakon uređenja te jednakosti dobivamo:

$$P = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

ili:

$$2P = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2). \tag{12}$$

Obilazimo li kod primjene ovih formula trokut u pozitivnom smislu (protiv kazaljke na satu, ploština lijevo), dobit ćemo za P pozitivnu vrijednost, inače negativnu.

Promijenimo li smisao obilaženja trokuta, dobit ćemo za ploštinu trokuta negativnu vrijednost.

Radi pokusa ploština trokuta se računa još jednom i to tako da se trokut obilazi u negativnom smislu (u smislu kazaljke na satu), uz primjenu slične formule:

$$2P = y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2) \tag{12a}$$

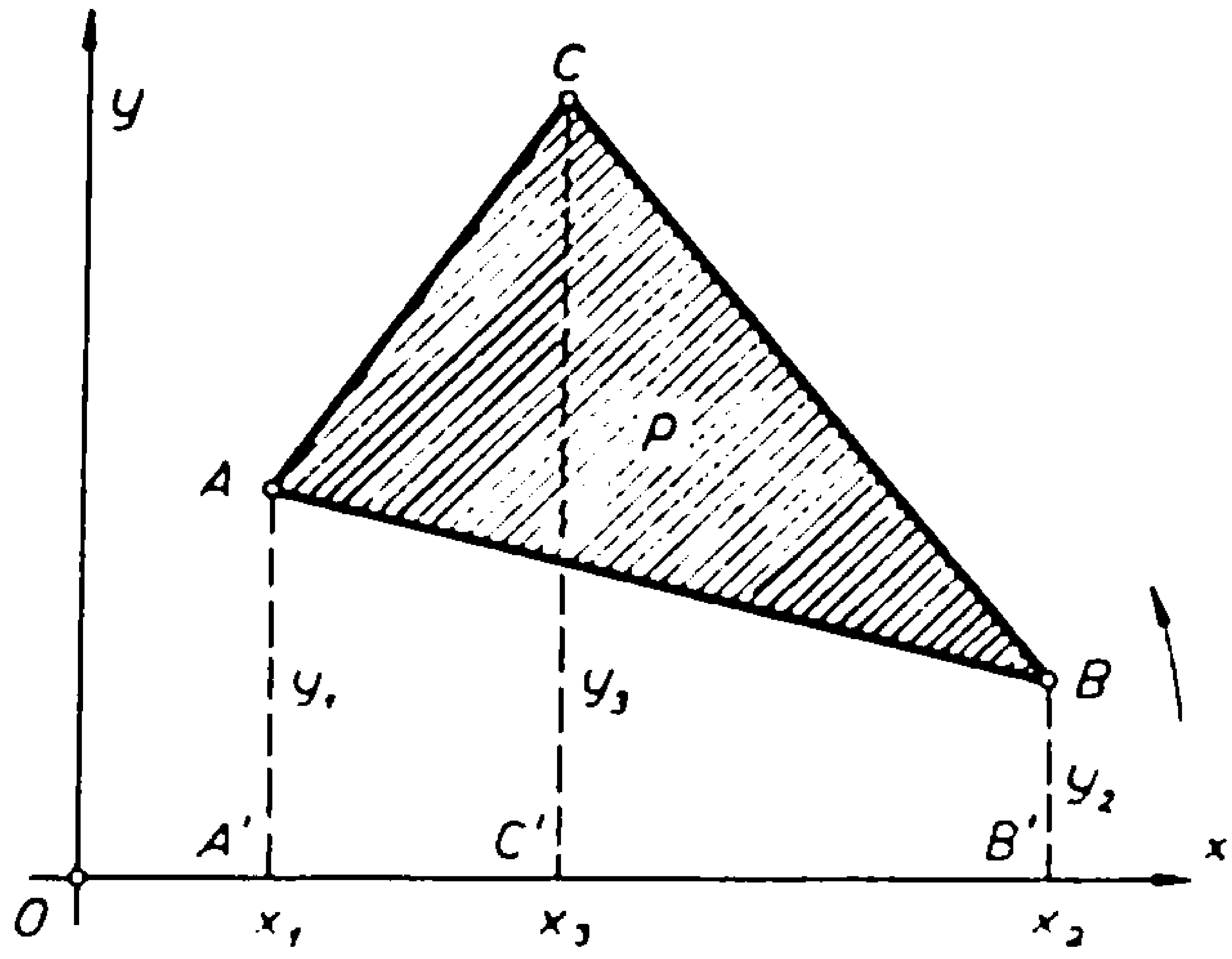
I u tom slučaju dobivamo za ploštinu P trokuta pozitivnu vrijednost.

Ako tri tačke $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ leže na istom pravcu, tada je ploština trokuta $P = 0$, tj. prema (12):

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0.$$

Uredimo li tu jednadžbu, dobit ćemo u jednostavnijem obliku u v j e t d a t r i t a č k e l e ž e n a i s t o m p r a v c u:

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \tag{13}$$



Sl. 73

Primjer:

Kolika je ploština trokuta kome su vrhovi $A(-2, 4)$, $B(-4, -6)$ i $C(5, -3)$, (vidi sl. 72).

Prema (12):

$$2P = -2(-6+3) - 4(-3-4) + 5(4+6) = 6 + 28 + 50 = 84$$

Prema (12a):

$$2P = 4(5+4) - 3(-4+2) - 6(-2-5) = 36 + 6 + 42 = 84$$

$$\underline{P = 42 \text{ kv. jedinice.}}$$

§ 6. JEDNADŽBA KRIVULJE

1. Svaka funkcija od dvije promijenljive x i y, eksplicitna $y = f(x)$ ili implicitna $F(x, y) = 0$, predočuje krivulju u ravnini XY. Izraz $y = f(x)$ ili $F(x, y) = 0$ zove se tada jednadžba krivulje.

2. Koordinate bilo koje tačke krivulje ili opće tačke krivulje T označuju se obično sa x i y, a za označivanje posebnih tačaka pridjeljuju se x i y indeksi, npr. $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$ itd. Sve što vrijedi za opću tačku vrijedi i za posebnu, ali obratno ne mora vrijediti.

3. Jednadžba krivulje analitički je izraz svojstava opće tačke krivulje, odnosno njenih koordinata.

4. Tačka $T_1(x_1, y_1)$ leži na krivulji $y = f(x)$ ili $F(x, y) = 0$, kad je $y_1 = f(x_1)$ ili $F(x_1, y_1) = 0$, tj. kad koordinate tačke T_1 zadovoljavaju jednadžbu krivulje.

5. Krivulja prolazi ishodištem koordinatnog sustava ako u njenoj jednadžbi nema člana slobodnog od x i y, jer samo u tom slučaju koordinate ishodišta (0, 0) mogu zadovoljavati jednadžbu krivulje.

6. Zajednička rješenja sustava jednadžbi $F_1(x, y) = 0$ i $F_2(x, y) = 0$ daju koordinate presjecišta krivulja koje su predočene tim jednadžbama, jer presjecište pripada jednoj i drugoj krivulji.

7. Kako jednadžba osi X glasi $y = 0$, a jednadžba osi Y $x = 0$ dobit će se apscise presjecišta krivulje s osi X, ako se u njenu jednadžbu $y = f(x)$ ili $F(x, y) = 0$ uvrsti za y vrijednost 0, dok uvršenje $x = 0$ daje ordinate presjecišta krivulje s osi Y.

§ 7. PRAVAC

1. JEDNADŽBE PRAVCA

a) Eksplicitni oblik jednadžbe pravca

Napisati jednadžbu pravca znači napisati relaciju koja veže koordinate x i y opće tačke T pravca s onim, čime je pravac određen.

Smjer pravca u ravnini određen je kutom α, što ga pravac zatvara s pozitivnim smislom osi X, a njegov položaj — odsječkom $OB = b$, što ga pravac siječe na osi Y (vidi sl. 74).

Prema tome:

Zadano: α, b.

Traži se: jednadžba pravca.

Neka je $T\,(x, y)$ bilo koja tačka na zadanom pravcu. Iz pravokutnog trokuta BCT slijedi prema slici 74:

$$y - b = x \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

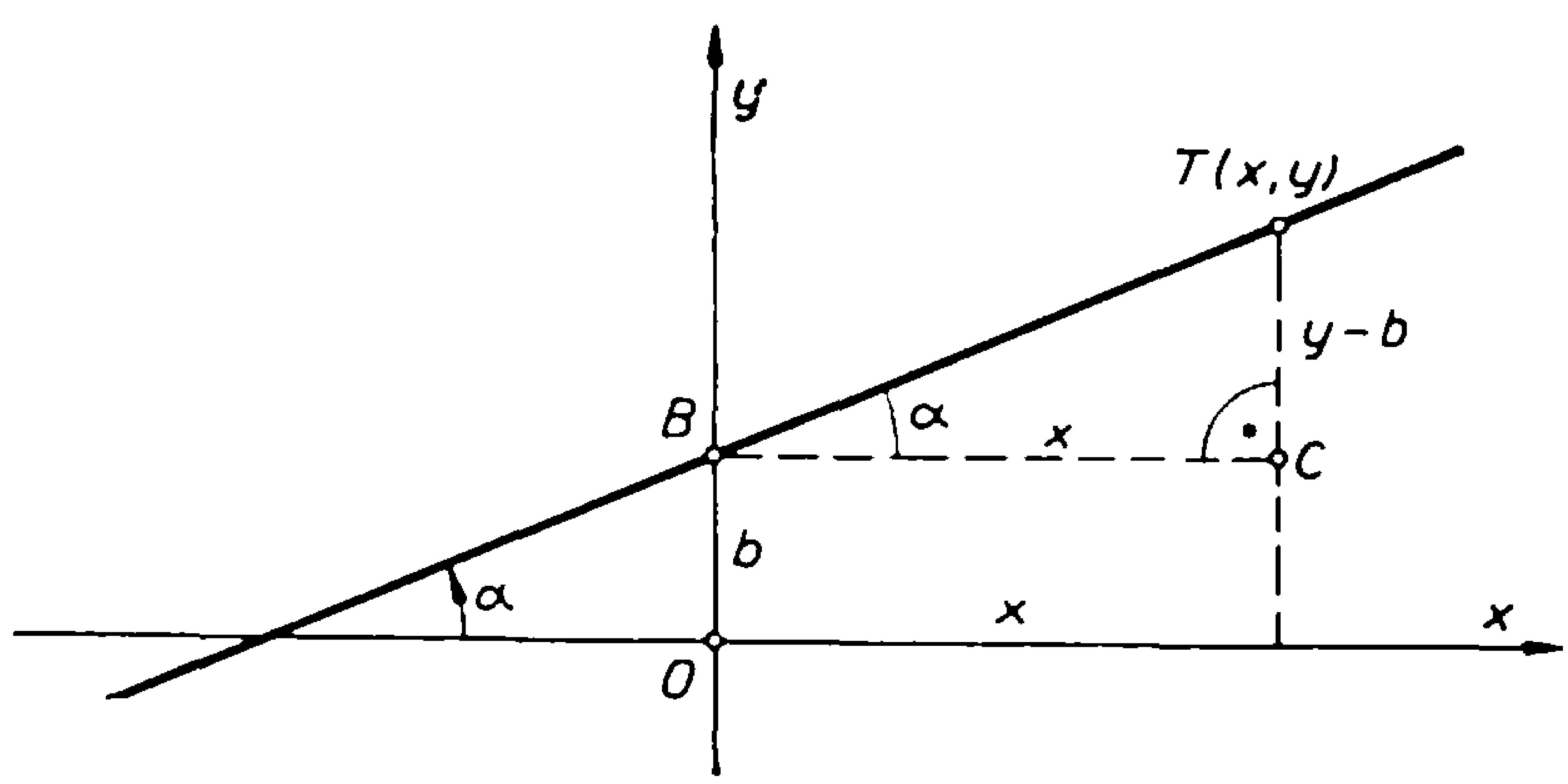
a odatle uz oznaku:

$$\operatorname{tg} \alpha = a$$

dobivamo traženu jednadžbu pravca u eksplicitnom obliku:

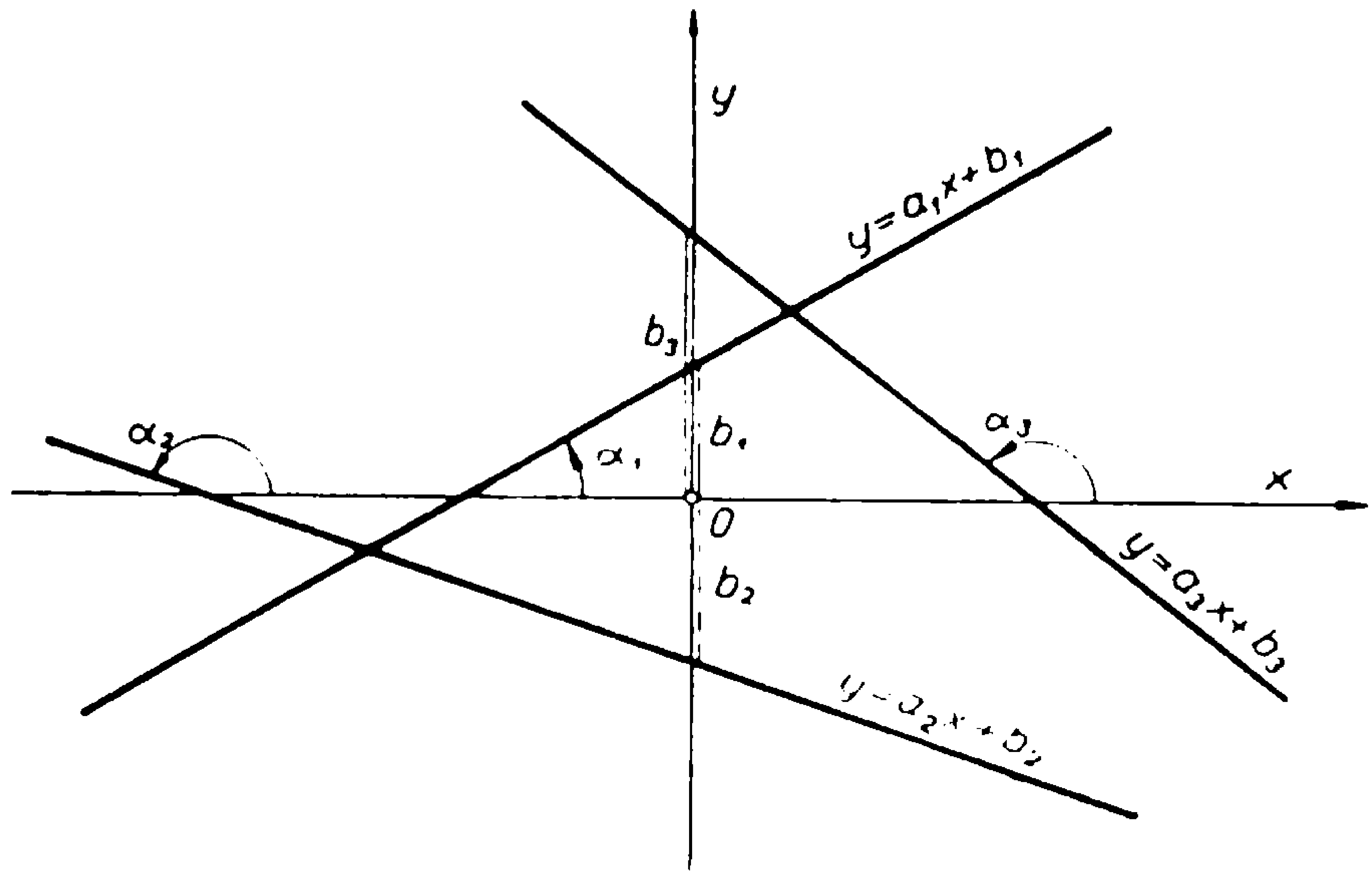
$$y = ax + b \tag{14}$$

$a = \operatorname{tg} \alpha$ je koeficijent smjera ili gradijent pravca, tj. tangens kuta, što ga pravac zatvara s pozitivnim smislom osi X. Kut α se mijenja od 0 do 180^0.



Sl. 74

»b« je odsječak na osi Y, pozitivan prema gore, negativan prema dolje.



S. 75

Na slici 75 pravac $y = a_1 x + b_1$ ima pozitivni koeficijent smjera $a_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, jer kut α_1, leži u I kvandrantu, dok pravci $y = a_2\ x + b_2$ i $y = a_3 x + b_3$ imaju negativne koeficijente smjera $a_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ i $a_3 = \operatorname{tg} \alpha_3$, jer kutovi α_2 i α_3 leže u II kvadrantu.

Ako pravac prolazi kroz ishodište O (npr. pravci na slici 76) tada je $b = 0$, pa je prema (14)

$$y = ax \tag{15}$$

jednadžba pravca kroz ishodište.

Slijedi:

Raspolovnica I i III kvadranta ima jednadžbu:

$$y = x, \tag{15a}$$

jer je: $a = \operatorname{tg} 45^0 = 1,$

a raspolovnica II i IV kvadranta:

$$y = -x \tag{15b}$$

jer je:

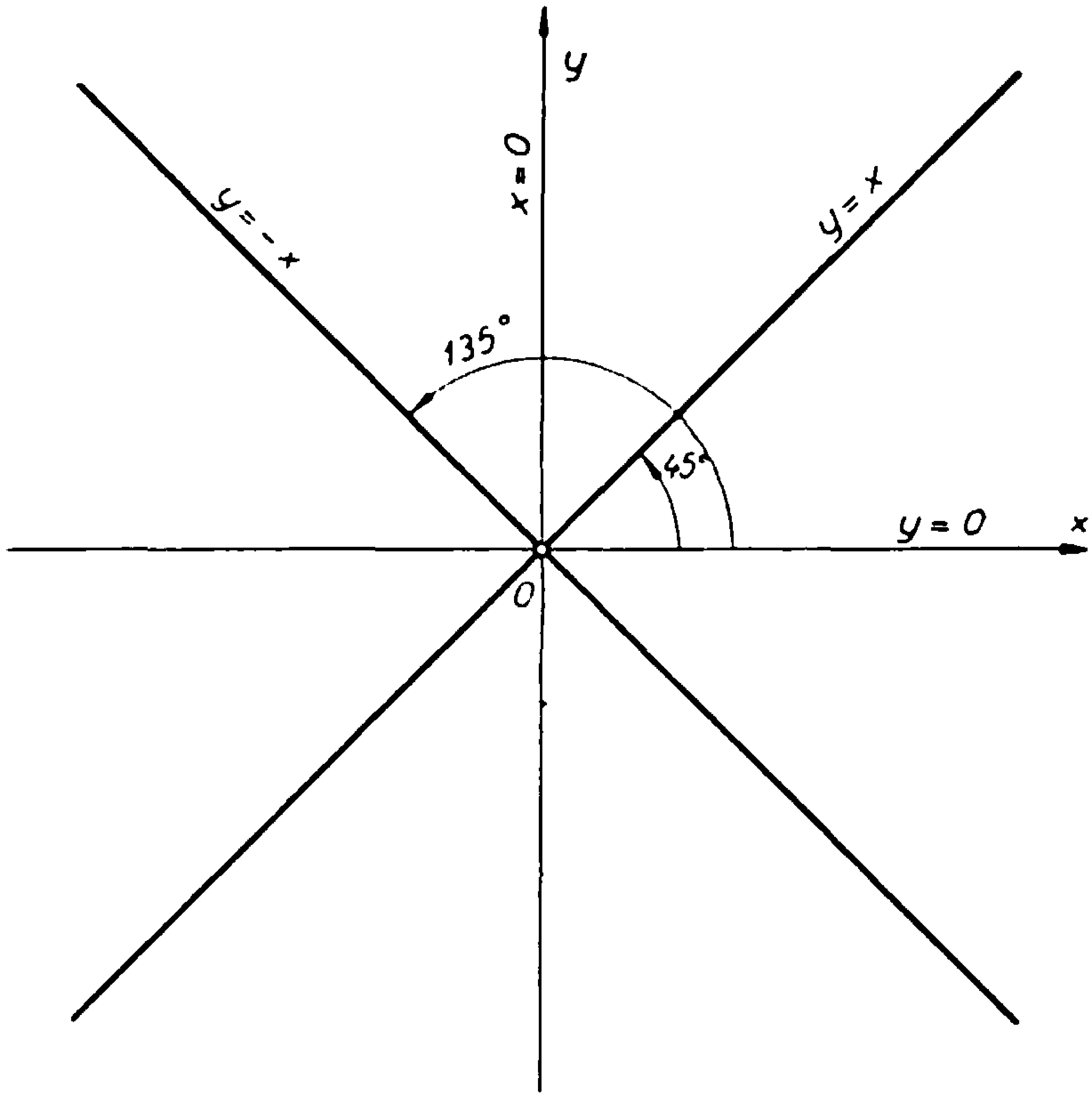
$$a = \operatorname{tg} 135^0 = \operatorname{tg}\ (90^0 + 45^0) = -\operatorname{ctg} 45^0 = -1$$ (vidi sl. 76).

J e d n a d ž b a o s i X g l a s i :

$$y = 0, \tag{15c}$$

jer je $\alpha = 0$, a $\operatorname{tg} 0 = 0$, pa je prema (15) $0 \cdot x = 0$.

Da dobijemo jednadžbu osi Y, napišimo (15) u obliku $x = \frac{y}{a}$.



Sl. 76

Za os Y je $a = \operatorname{tg} 90^0 = \infty$, pa je

$$x = 0 \tag{15d}$$

j e d n a d ž b a o s i Y.

b) Konstrukcija pravca

Pomoću poznatog koeficijenta smjera a i odsječka b može se pravac jednostavno konstruirati, ako se njegova jednadžba prikaže u eksplicitnom obliku $y = a\,x + b$.

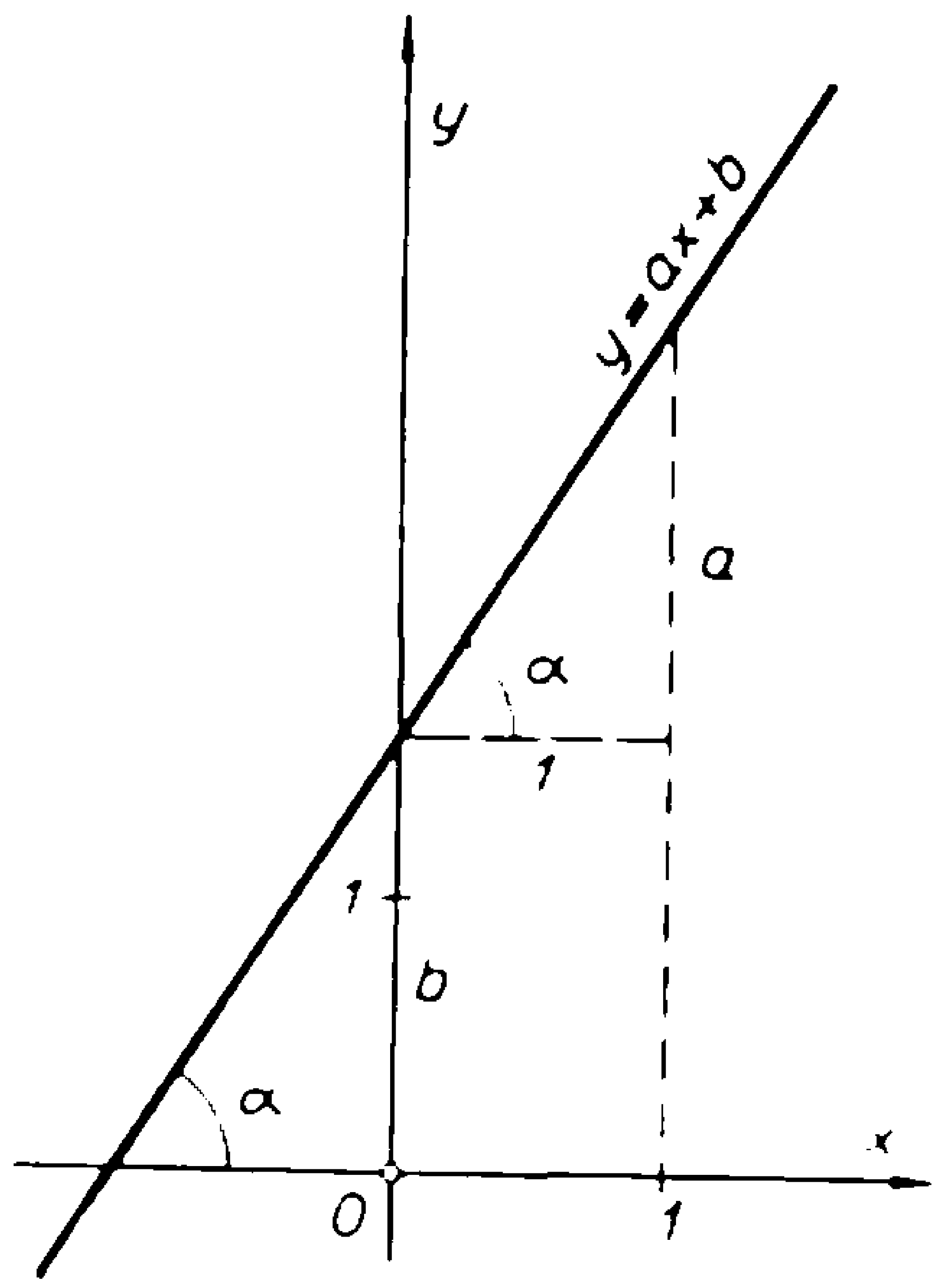
Na os Y nanese se naime odsječak »b« pozitivni prema gore, a negativni prema dolje; iz tako dobivene tačke na osi Y ide se u smjeru osi X n a d e s n o za 1, pa se u smjeru osi Y nanese koeficijent smjera a: pozitivni prema gore, a negativni prema dolje. Spojnica krajnjih tačaka nanesenih dužina b i a daje traženi pravac, kako se to vidi na sl. 77.

Dokaz konstrukcije:

Iz slike 77 slijedi:

1) Odsječak na osi Y je b.

2) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{1} = a =$ koeficijent smjera pravca.



Sl. 77

Ako je koeficijent smjera a razlomak, zgodno je postupiti tako da se nadesno ne ide za 1, već za nazivnik od a, dok se brojnik nanosi u smjeru osi Y, uzevši u obzir predznak razlomka.

Primjer:

Neka se narišu pravci:

$p_1 \ldots\ldots y = -x + 5$

$p_2 \ldots\ldots 3x + y + 2 = 0$

$p_3 \ldots\ldots 2x - 3y - 12 = 0$

$p_4 \ldots\ldots 3x + 7y = 0$

pravac p_1: $a_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = -1$; $b_1 = 5$

pravac p_2: u eksplicitnom obliku $y = -3x - 2$

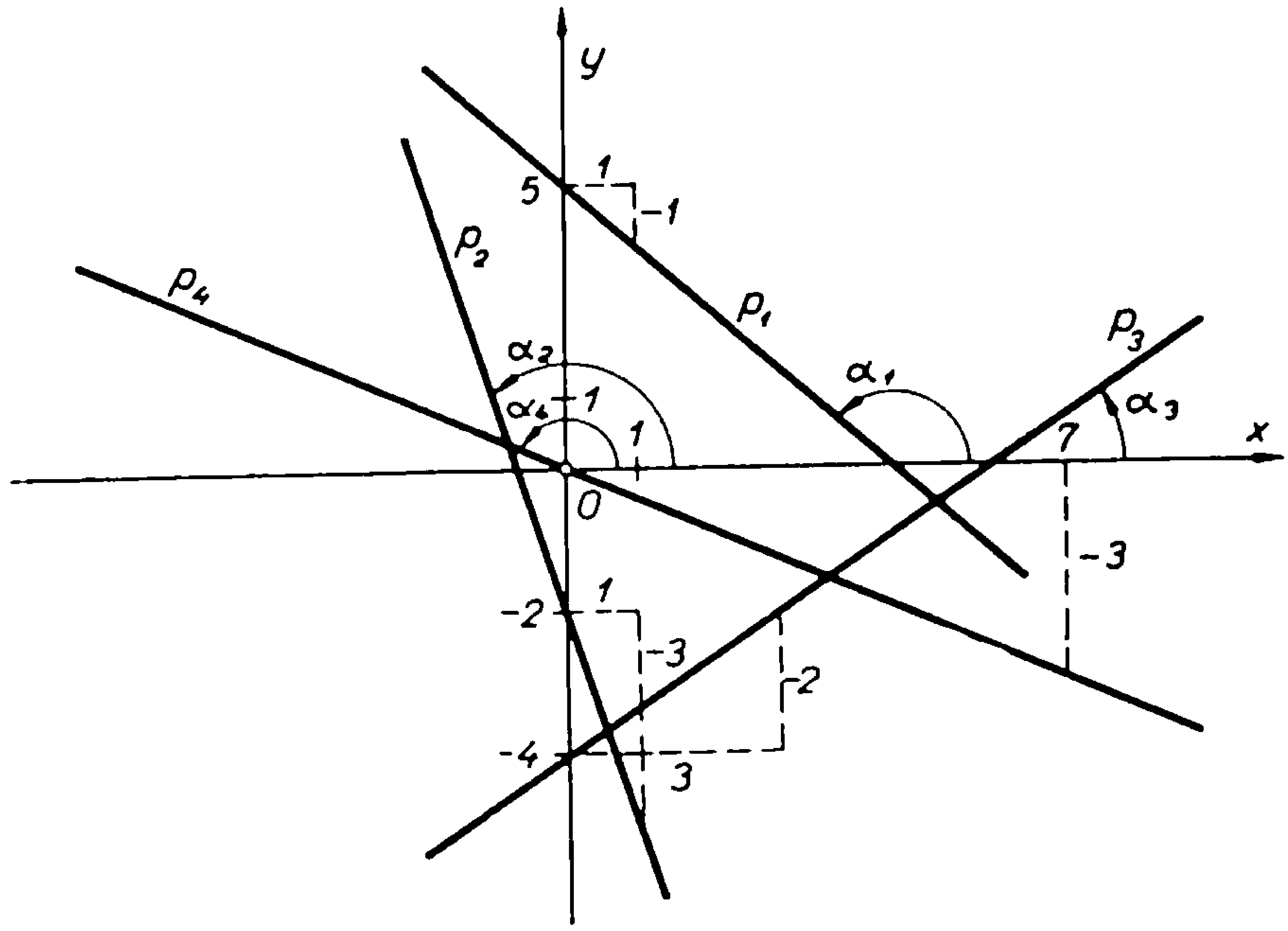
$a_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = -3$; $b_2 = -2$

pravac p_3: u eksplicitnom obliku $y = \frac{2}{3} x - 4$

$a_3 = \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{2}{3}$; $b_3 = -4$

pravac p_4: u eksplicitnom obliku $y = -\frac{3}{7}x$

$a_4 = \operatorname{tg} \alpha_4 = -\frac{3}{7}$; $b_4 = 0$. Vidi sl. 78.



Sl. 78

c) Opći ili implicitni oblik jednadžbe pravca

Svaka jednadžba koja sadrži x i y u prvom stupnju, predočuje pravac u ravnini XY. Prema tome je:

$$Ax + By + C = 0 \tag{16}$$

o p ć i i l i i m p l i c i t n i o b l i k j e d n a d ž b e p r a v c a.

Posebni slučajevi (vidi sl. 79):

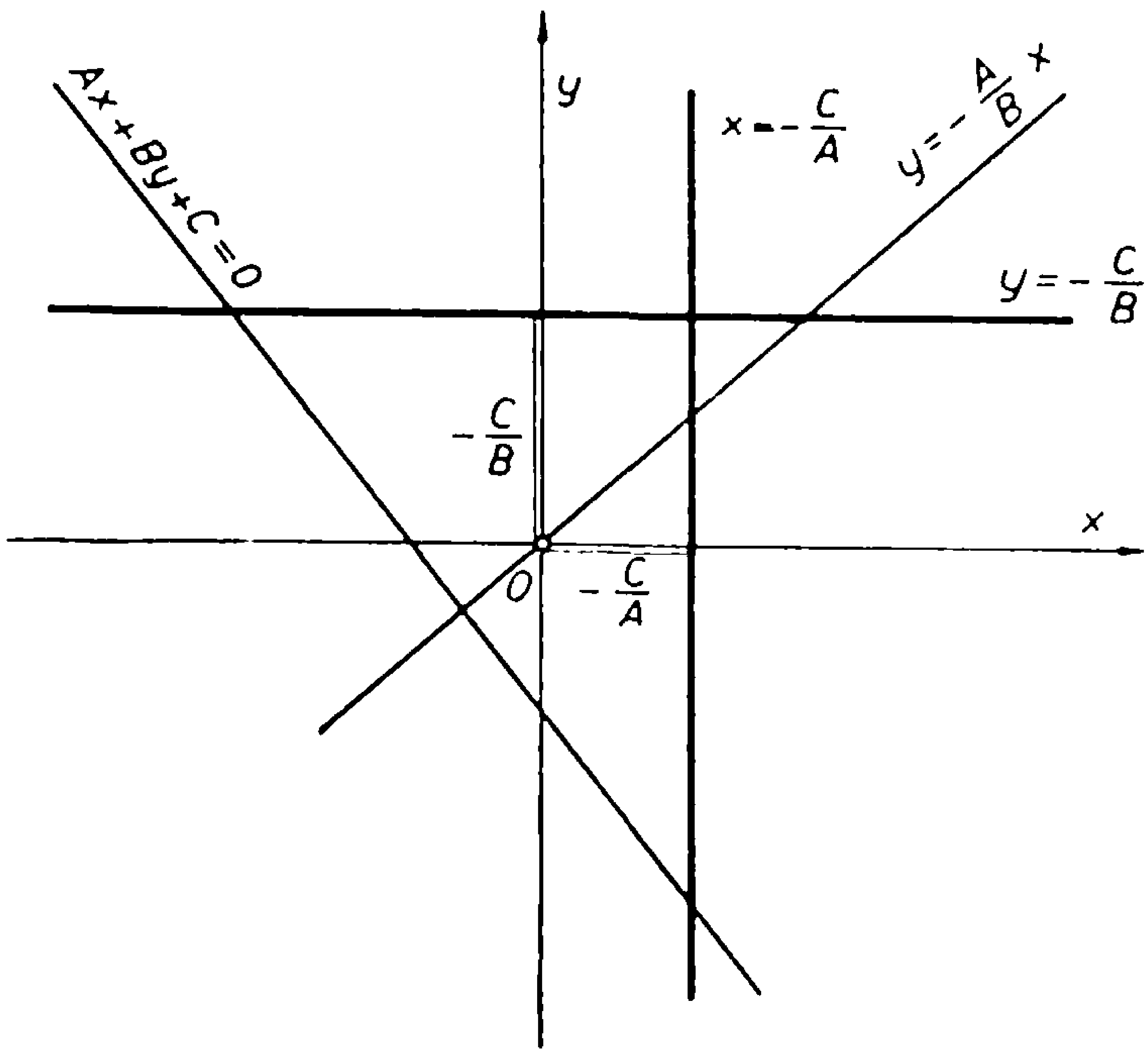
1) $A = 0$. Tada je $By + C = 0$ ili $y = -\frac{C}{B}$, a to je pravac usporedan s osi X i udaljen od nje za $-\frac{C}{B}$. Npr. $y = 3$.

2) $B = 0$. Tada je $Ax + C = 0$ ili $x = -\frac{C}{A}$, a to je pravac usporedan s osi Y i udaljen od nje za $-\frac{C}{A}$. Npr. $x = 2$.

3. $C = 0$. Tada je $Ax + By = 0$ ili $y = -\frac{A}{B}x$, a to je pravac koji

prolazi ishodištem koordinatnog sustava i kojemu je koeficijent smjera $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{A}{B}$.

Npr. $y = 5x$.



Sl. 79

4) $A = 0$ i $C = 0$. Tada je $By = 0$ ili $y = 0$, a to je jednadžba osi X

5) $B = 0$ i $C = 0$. Tada je $Ax = 0$ ili $x = 0$, a to je jednadžba osi Y.

Prelaz od općeg oblika jednadžbe pravca na eksplicitni oblik vrši se tako da se jednadžba $Ax + By + C = 0$ riješi po y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad \text{eksplicitni oblik,}$$

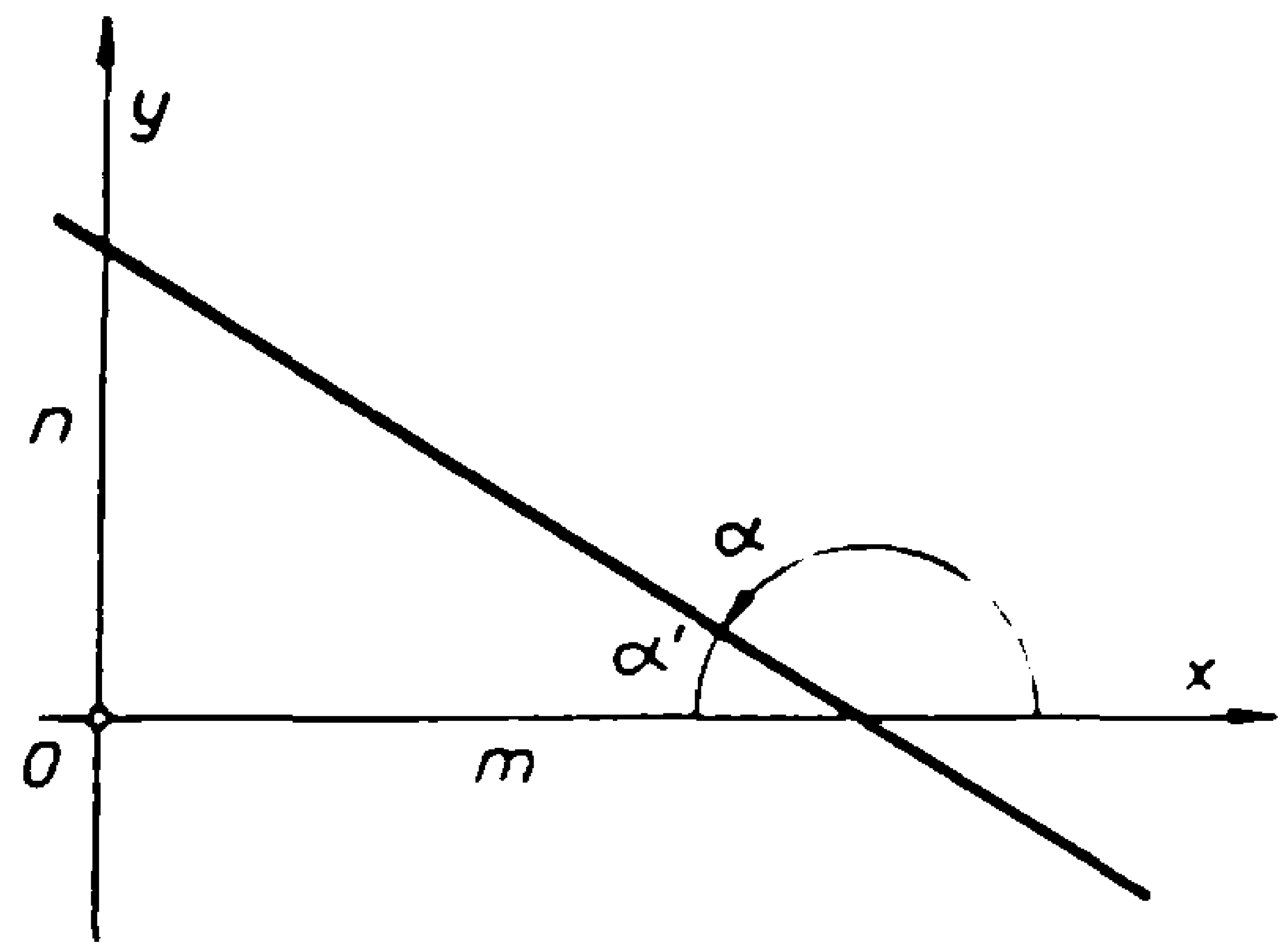
$$\left.\begin{array}{r} \text{koeficijent smjera} \quad a = \operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{A}{B} \\[2ex] \text{odsječak na osi Y} \quad b = -\dfrac{C}{B} \end{array}\right| \tag{16a}$$

(Primjer vidi na str. 187 i 188).

d) Segmentni oblik jednadžbe pravca

Smjer i položaj pravca u ravnini jednoznačno je određen segmentima m i n, tj. odsječcima na osima X i Y.

Uvrstimo li u jednadžbu (14) $y = ax + b$



Sl. 80

$$b = n$$

i

$$a = \text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,(180 - \alpha') = -\text{tg}\,\alpha' = -\frac{n}{m} \quad \text{(vidi sliku 80),}$$

dobit ćemo:

$$y = -\frac{n}{m}x + n \,/ : n$$

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1. \tag{17}$$

Značajno je za taj oblik da je slobodni član $+ 1$ na desnoj strani i da x i y imaju također predznak $+$, dok segmenti m i n mogu biti i negativni.

Prelaz od općeg oblika na segmentni vrši se tako da se jednadžba $Ax + By + C = 0$ podijeli sa $-C$, pa se recipročne vrijednosti tako dobivenih koeficijenata od x i y napišu u obliku nazivnika:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} m &= -\frac{C}{A} \\ n &= -\frac{C}{B} \end{aligned}\right| \tag{17a}$$

(Primjer vidi na str. 187).

e) Normalni ili Hesseov oblik jednadžbe pravca

Smjer i položaj pravca u ravnini jednoznačno je određen dužinom p okomice (normale) spuštene na pravac iz ishodišta i kutom φ, što ta okomica zatvara sa $+$ osi X (vidi sl. 81).

Iz te slike slijedi:

$$m = \frac{p}{\cos\varphi} \quad \text{i} \quad n = \frac{p}{\sin\varphi}.$$

Uvrstimo li to u jednadžbu (17) $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$

dobit ćemo:

$$\frac{\cos\ \varphi}{p}x + \frac{\sin\ \varphi}{p}y = 1 \,|\cdot p$$

$$x\ \cos\ \varphi + y\ \sin\ \varphi - p = 0,$$

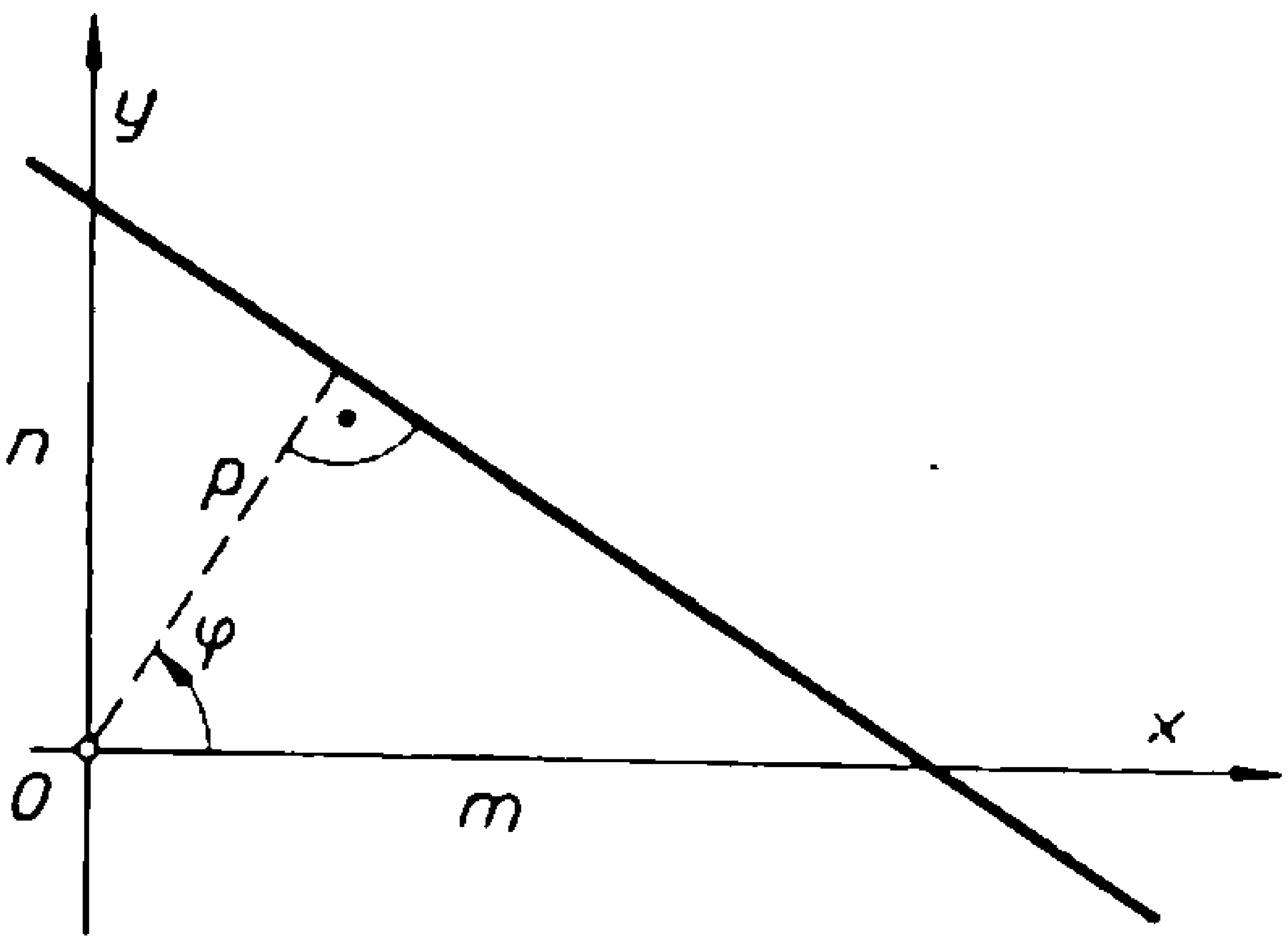
a to je normalni ili Hesseov oblik jednadžbe pravca.

p i φ su uvijek pozitivni

pa se mijenjaju:

p od 0 do $+\ \infty$

φ od 0 do 360^0.



Sl. 81

Prelaz od općeg oblika na normalni vrši se tako da se jednadžba $Ax + By + C = 0$ podijeli sa $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$, pri čemu predznak tog drugog korijena mora biti protivan predznaku od C, tj.

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

ili:
$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \qquad (18a)$$

normalni oblik jednadžbe pravca.

Odatle slijedi prema (18):

$$\left.\begin{aligned} \cos\ \varphi &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \\ \sin\ \varphi &= \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \\ p &= \frac{C}{\mp\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned}\right| \qquad (18b)$$

Iz predznaka koeficijenata od x i y, tj. iz predznaka $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$ vidi se kvadrant u kojem leži φ:

Ako su oba $+$, φ leži u I kvadrantu, oba minus — u III, sinus $+$, kosinus — u II, sinus —, kosinus $+$ u IV kvadrantu (vidi sl. 42).

Primjer:

Zadana je opća jednadžba pravca $3{,}5x + 2{,}8y + 5{,}7 = 0$.

Neka se napiše:

1) Eksplicitna jednadžba tog pravca i odredi njegov koeficijent smjera odsječak na osi Y i kut koji taj pravac zatvara sa + osi X.

2) Segmentna jednadžba pravca i odrede oba segmenta m i n.

3 Normalna jednadžba pravca i odredi dužina normale p i kut φ koji normala zatvara sa + osi X.

Za 1) Jednadžba zadanog pravca u eksplicitnom obliku

Računamo y:

$$y = -\frac{3{,}5}{2{,}8}x - \frac{5{,}7}{2{,}8} \quad \text{ili} \quad \underline{y = -1{,}250\,x - 2{,}036.}$$

Koef. smjera: $a = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{3{,}5}{2{,}8} = \underline{-1{,}250.}$

Odsječak na osi Y: $b = -\frac{5{,}7}{2{,}8} = \underline{-2{,}036.}$

Kut pravca sa + osi X:

$\lvert A \rvert$ $\lvert B \rvert$	3,5 2,8	0,54407 0,44716	I II
$\log \operatorname{tg} \alpha_0$ α_0 $\alpha = 180^0 - \alpha_0$	 $51^0\,20'\,26''$ $128^0\,39'\,34''$	0,09691 10,09691 – 10	I — II
$\underline{\alpha = 128^0\,39'\,34''.}$			

(Vidi sl. 82).

$\lvert A \rvert$ znači »apsolutna vrijednost broja A«, tj. vrijednost broja A bez obzira na predznak. Npr. $\lvert +3 \rvert = 3$, $\lvert -3 \rvert = 3$.

Za 2) Segmentni oblik jednadžbe zadanog pravca:

$$3{,}5\,x + 2{,}8\,y + 5{,}7 = 0 \; / : -5{,}7$$

$$\frac{3{,}5}{-5{,}7}x + \frac{2{,}8}{-5{,}7}y - 1 = 0$$

ili:

$$\frac{x}{\frac{-5{,}7}{3{,}5}} + \frac{y}{\frac{-5{,}7}{2{,}8}} = 1$$

ili:

$$\underline{\frac{x}{-1{,}629}+\frac{y}{-2{,}036}}=1$$

$$\underline{m=-1{,}629}$$

$$\underline{n=-2{,}036.}$$

(Vidi sl. 82).

Za 3) Normalni oblik:

$$3{,}5\,x+2{,}8\,y+5{,}7=0$$

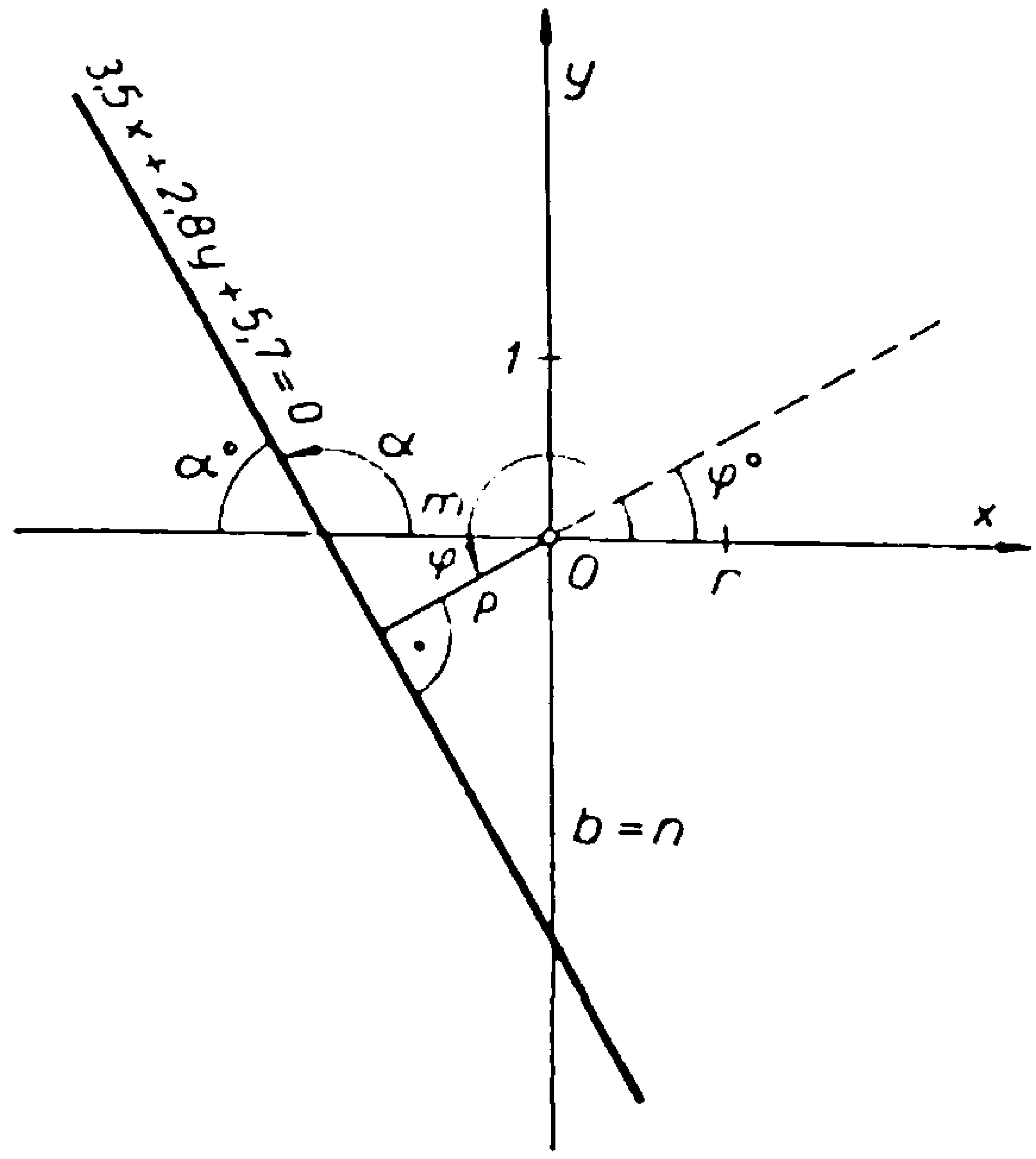
$C=+5{,}7$, dakle dijelimo jednadžbu pravca sa:

$$-\sqrt{A^2+B^2}=-\sqrt{3{,}5^2+2{,}8^2}=$$

$$=-\sqrt{12{,}25+7{,}84}=-\sqrt{20{,}09}=-4{,}482.$$

Dobijemo normalni oblik:

$$\frac{3{,}5x+2{,}8y+5{,}7}{-4{,}482}=0$$



Sl. 82

ili: $-\frac{3{,}5}{4{,}482}x-\frac{2{,}8}{4{,}482}y-\frac{5{,}7}{4{,}482}=0$ ili $\underline{-0{,}781x-0{,}625y-1{,}272=0.}$

Dakle: $\cos\varphi=-\frac{3{,}5}{4{,}482}=-0{,}781$

$\sin\varphi=-\frac{2{,}8}{4{,}482}=-0{,}625$

Kako je $\cos\varphi<0$ i $\sin\varphi<0$, kut φ leži u III kvadrantu.

Pokus: $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=0{,}61+0{,}39=1.$

$$-p=-\frac{5{,}7}{4{,}482}=-1{,}272;\quad \underline{p=1{,}272.}$$

Kut φ normale p s + osi X:

A B $\sqrt{A^2+B^2}$	3,5 2,8 4,482	$^{+1}0{,}54407^{-1}$ $^{+1}0{,}44716^{-1}$ 0,65147	I II III
$\cos\varphi_0$ $\sin\varphi_0$ φ_0 $\varphi=180+\varphi_0$	 38° 39′ 35″ 218° 39′ 35″	0,89260—1 0,79569—1 9,89260—10 9,79569—10	I—III II—III
$\underline{\varphi=218°\,39'\,35''}$			

(Vidi sl. 82).

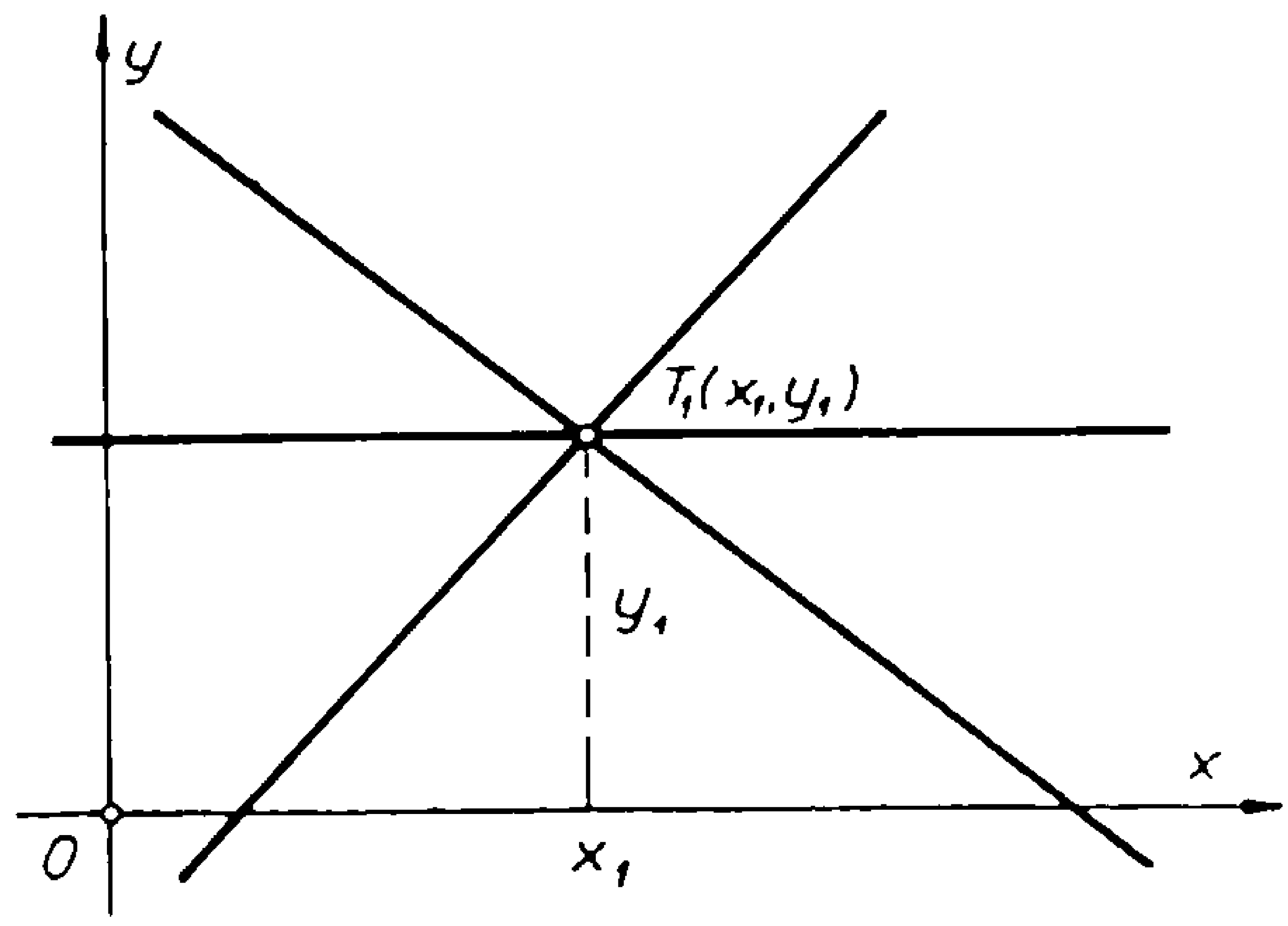
f) Jednadžba pravca kroz zadanu tačku T_1 (x_1, y_1)

Pravac $y = ax + b$ prolazi zadanom tačkom T_1 (x_1, y_1), dakle koordinate tačke T_1 moraju zadovoljavati jednadžbu pravca, tj.

$$y_1 = ax_1 + b.$$

Ako odredimo b iz te jednadžbe i uvrstimo tu vrijednost za b u prvu jednadžbu, dobit ćemo traženu jednadžbu pravca koji prolazi tačkom T_1 (x_1, y_1):

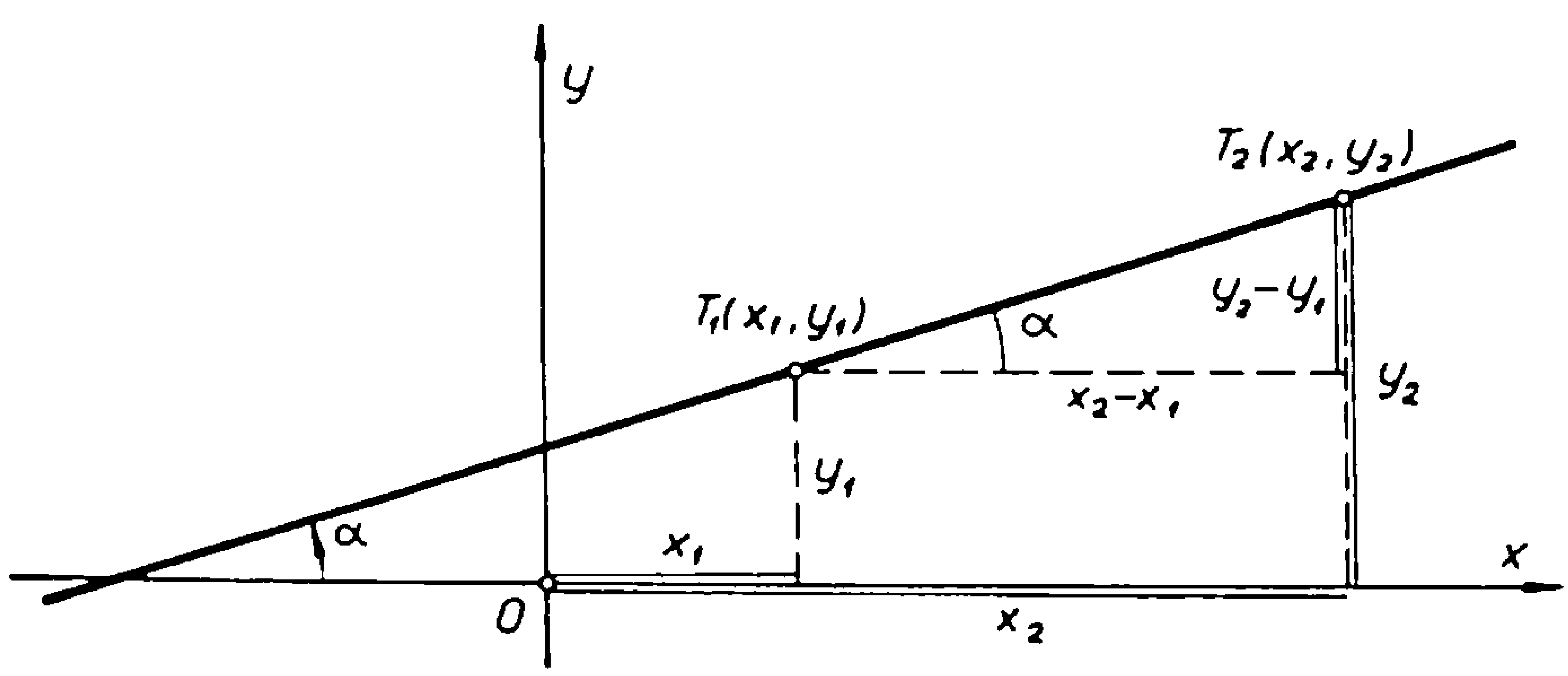
$$y - y_1 = a\ (x - x_1). \tag{19}$$



Sl. 83

Koeficijent smjera pravca a ostaje neodređen, jer kroz jednu tačku možemo povući bezbroj pravaca. Smatramo li a promjenljivom veličinom, predočuje jednadžba (19) pramen zraka kroz tačku T_1 (x_1, y_1). Vidi sl. 83.

g) Jednadžba pravca kroz dvije zadane tačke T_1 (x_1, y_1) i T_2 (x_2, y_2)



Sl. 84

Pravac prolazi tačkom T_1 (x_1, y_1), dakle njegova jednadžba ima oblik (19) $y - y_1 = a\ (x - x_1)$. Ali prema slici 84:

Koeficijent smjera $a = \operatorname{tg}\ \alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Uvrštenje u (19) daje jednadžbu pravca kroz dvije tačke:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \tag{20}$$

ili ako tu jednadžbu podijelimo sa $y_2 - y_1$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{20a}$$

2) USPOREDNOST DVAJU PRAVACA

Koeficijent smjera pravca određuje njegov smjer; stoga su dva pravca usporedna ako su njihovi koeficijenti smjera jednaki.

a) U eksplicitnom obliku:

Pravci $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ su usporedni, kad je $a_1 = a_2$, jer je tada $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$, pa je $\alpha_1 = \alpha_2$.

Primjer:

Kako glasi jednadžba pravca, koji prolazi tačkom T_1 (6, — 5), a usporedan je s pravcem $2x + 3y + 5 = 0$.

Zadani pravac u eksplicitnom obliku: $y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$.

Koeficijent smjera traženog pravca = koeficijent smjera zadanog pravca = $= a = -\frac{2}{3}$.

Prema (19) dobijemo:

$$y + 5 = -\frac{2}{3}(x - 6).$$

Odatle:

$$\underline{y = -\frac{2}{3}x - 1} \qquad \text{ili} \qquad \underline{2x + 3y - 3 = 0.}$$

b) U implicitnom obliku:

Pravci $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ su usporedni,

kad je: $$-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$$ [vidi (16a)]

ili:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$$

ili: $$A_1 : A_2 = B_1 : B_2.$$

Tako su npr. $x - 3y + 8 = 0$ i $2x - 6y - 7 = 0$ usporedni pravci, jer je $\frac{1}{-3} = \frac{2}{-6}$.

c) U n o r m a l n o m o b l i k u :

Pravci $x \cdot \cos\varphi_1 + y \cdot \sin\varphi_1 - p_1 = 0$ i $x \cdot \cos\varphi_2 + y \cdot \sin\varphi_2 - p_2 = 0$ su usporedni, kad je $\varphi_1 = \varphi_2$ ili $\varphi_1 = \varphi_2 + 180^0$.

Prikaži to na slici!

3. PRESJECIŠTE DVAJU PRAVACA p_1 i p_2

$$p_1 : \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$p_2 : \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Presjecište $P(x_1, y_1)$ tih pravaca leži i na pravcu p_1 i na pravcu p_2, pa koordinate presjecišta x_1 i y_1 moraju zadovoljavati obje jednadžbe, o n e s u d a k l e k o r i j e n i s u s t a v a, k o j i č i n e o b j e j e d n a d ž b e p r a v a c a. Rješavanje sustava i primjere vidi: Aritmetika i algebra, § 11., 2b).

Naravno vrijedi i obrat: riješiti dvije linearne jednadžbe sa dvije nepoznanice znači odrediti koordinate presjecišta pravaca, koje te jednadžbe predočuju.

Primjer.

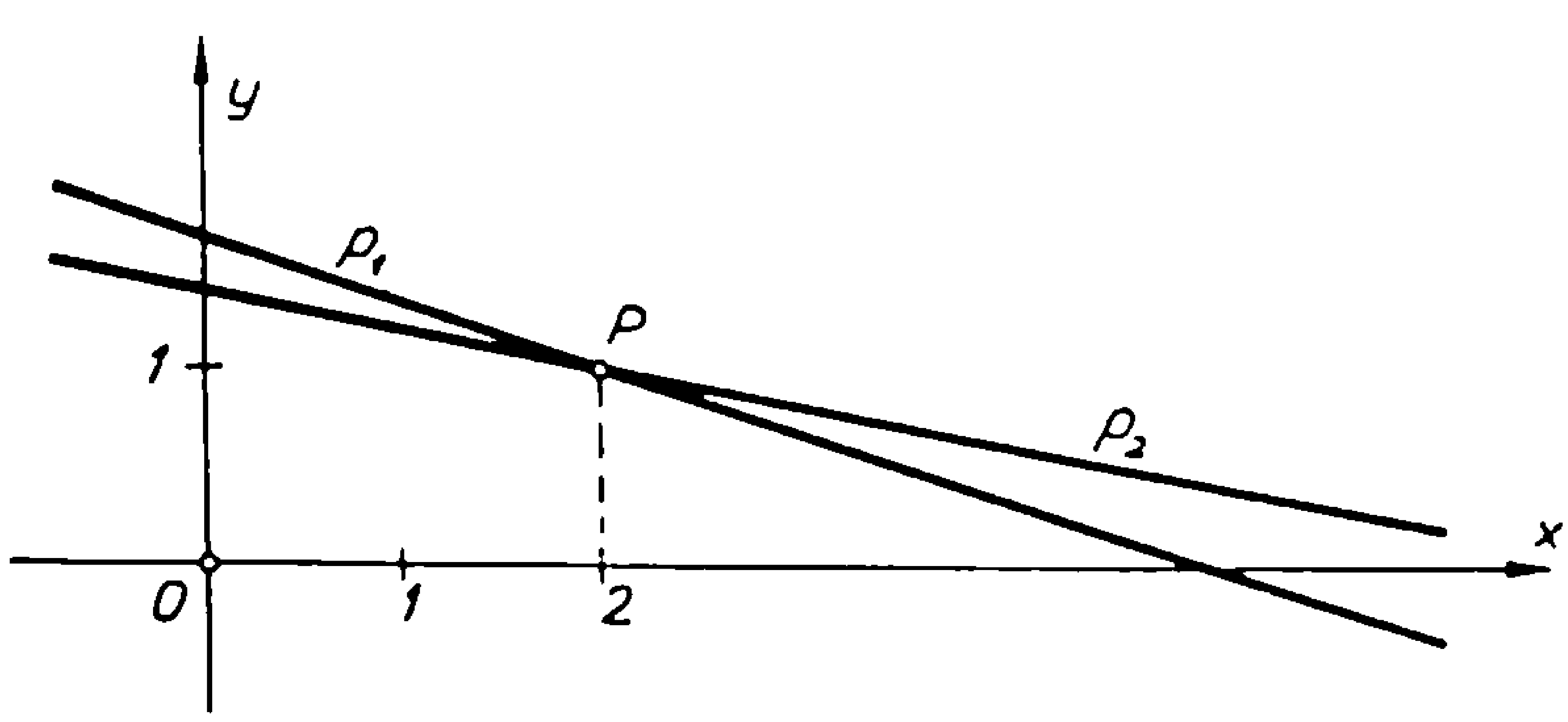
Neka se grafički riješi sustav:

$$2x + 7y = 11$$
$$x + 5y = 7.$$

U eksplicitnom obliku:

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{2}{7}x + \frac{11}{7} \; \ldots\ldots \; p_1 \\ y &= -\frac{x}{5} + \frac{7}{5} \; \ldots\ldots \; p_2, \end{aligned}\right| \qquad (a)$$

pri čemu je $\quad \dfrac{11}{7} \doteq 1{,}6; \quad \dfrac{7}{5} = 1{,}4.$



Sl. 85

Iz slike 85 slijedi:

$$\underline{x = 2}$$

$$\underline{y = 1.}$$

Numeričko rješenje:

Iz (a) slijedi: $$-\frac{2}{7}x + \frac{11}{7} = -\frac{x}{5} + \frac{7}{5} \quad \Big| \cdot 35$$

$$-10x + 55 = -7x + 49$$

ili: $$3x = 6; \quad \underline{x = 2.}$$

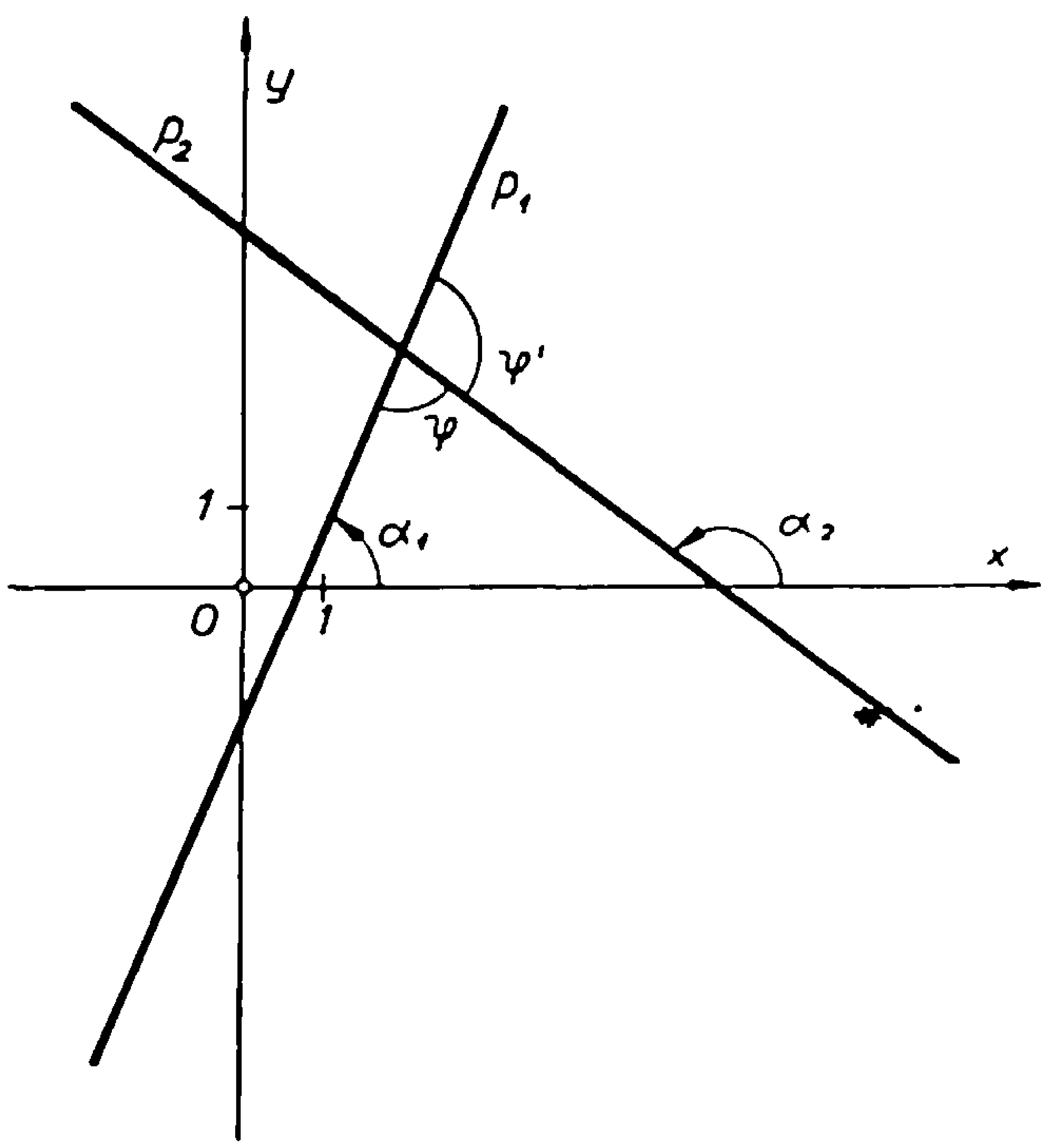
Iz (a) slijedi: $y = -\frac{2}{7} \cdot 2 + \frac{11}{7} = 1$

$$\underline{y = 1}$$

4. KUT DVAJU PRAVACA

$$p_1: \quad y = a_1 x + b_1$$

$$p_2: \quad y = a_2 x + b_2.$$



Sl. 86

Prema slici 86:

Vanjski kut trokuta

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \psi$$

ili:

$$\psi = \alpha_2 - \alpha_1,$$

odatle:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}$$

[vidi goniom. formulu (16)],

a kako je:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = a_1, \quad \text{a} \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = a_2,$$

bit će:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_1 \cdot a_2} \tag{21}$$

Dva pravca koja se sijeku čine zapravo dva kuta ψ i ψ' (vidi sl. 86) koji su suplementni, pa kako je $\operatorname{tg} \psi' = \operatorname{tg} (180^0 - \psi) = - \operatorname{tg} \psi$, razlikovat će se vrijednosti njihovih tangensa dobivenih iz (21) samo po predznaku. Kako se pod kutom dvaju pravaca razumije obično šiljati kut ψ, vrijednost toga kuta računamo iz dobivene vrijednosti tangensa bez obzira na predznak. Ukoliko se traži tupi kut ψ', npr. tupi kut trokuta, taj se kut dobiva iz $\psi' = 180^0 - \psi$.

Primjer:

Koji kut zatvaraju pravci $p_1: 5x - 2y - 4 = 0$

$p_2: 2x + 3y - 13 = 0$?

$$p_1: \quad y = \frac{5}{2} x - 2, \qquad a_1 = \frac{5}{2},$$

$$p_2: \quad y = -\frac{2}{3} x + \frac{13}{3}, \qquad a_2 = -\frac{2}{3}.$$

Računamo prema (21):

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{-\frac{2}{3} - \frac{5}{2}}{1 - \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{-19}{-4} = 4,75.$$

$$\log \operatorname{tg} \psi = 0,67669 = 10,67669 - 10.$$

$$\underline{\psi = 78^0\, 6'\, 41''.}$$

Da smo tražili kut ψ' imali bismo:

$$\psi' = 180^0 - \psi = \underline{101^0\, 53' 19''.}$$

5. OKOMITOST DVAJU PRAVACA

Sijeku li se dva pravca pod pravim kutom, tada je $\psi = 90^0$, pa je $\operatorname{tg} \psi = \infty$. Prema tome u formuli (21) mora biti u tom slučaju nazivnik jednak nuli, jer su u brojniku konačne vrijednosti. Dobiva se dakle:

$$1 + a_1 \cdot a_2 = 0$$

ili:

$$a_2 = -\frac{1}{a_1}, \text{ odnosno: } a_1 = -\frac{1}{a_2}. \tag{22}$$

Dva su pravca međusobno okomita ako su njihovi koeficijenti smjera recipročni i protivnog predznaka.

Ako su jednadžbe pravaca zadane u općem obliku:

$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ i $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, tada prema (16a):

$$a_1 = -\frac{A_1}{B_1}$$

i:
$$a_2 = -\frac{A_2}{B_2}.$$

Uvrštenje u (22) daje:

$$-\frac{A_2}{B_2} = \frac{B_1}{A_1}$$

ili:
$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \tag{22a}$$

To je uvjet okomitosti dvaju pravaca, čije su jednadžbe zadane u općem obliku.

Primjer:

Kako glasi jednadžba pravca koji prolazi tačkom A (7, —2), a stoji okomito na pravcu $3x - 5y + 4 = 0$?

U eksplicitnom obliku: $y = \frac{3}{5} x + \frac{4}{5}$, pa je $a_1 = \frac{3}{5}$.

Koeficijent smjera traženog pravca $a_2 = -\frac{1}{a_1} = -\frac{5}{3}$.

Prema (19): $y + 2 = -\frac{5}{3}(x - 7)$,

odatle:

$$\underline{y = -\frac{5}{3} x + \frac{29}{3}} \quad \text{ili} \quad \underline{5x + 3y - 29 = 0.}$$

Primjedba: Ako su pravci međusobno usporedni, $\psi = 0$, pa je i $\operatorname{tg} \psi = 0$, dakle u formuli (21) mora biti brojnik $a_2 - a_1 = 0$ ili $a_2 = a_1$, a to smo već imali.

6. UDALJENOST TAČKE OD PRAVCA

Traži se udaljenosa δ tačke T_1 (x_1, y_1) od pravca a koji je na slici 87 izvučen punom crtom:

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0.$$

Jednadžba pomoćnog pravca b koji prolazi tačkom T_1, i usporedan je s pravcem a, glasi:

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - (p + \delta) = 0$$

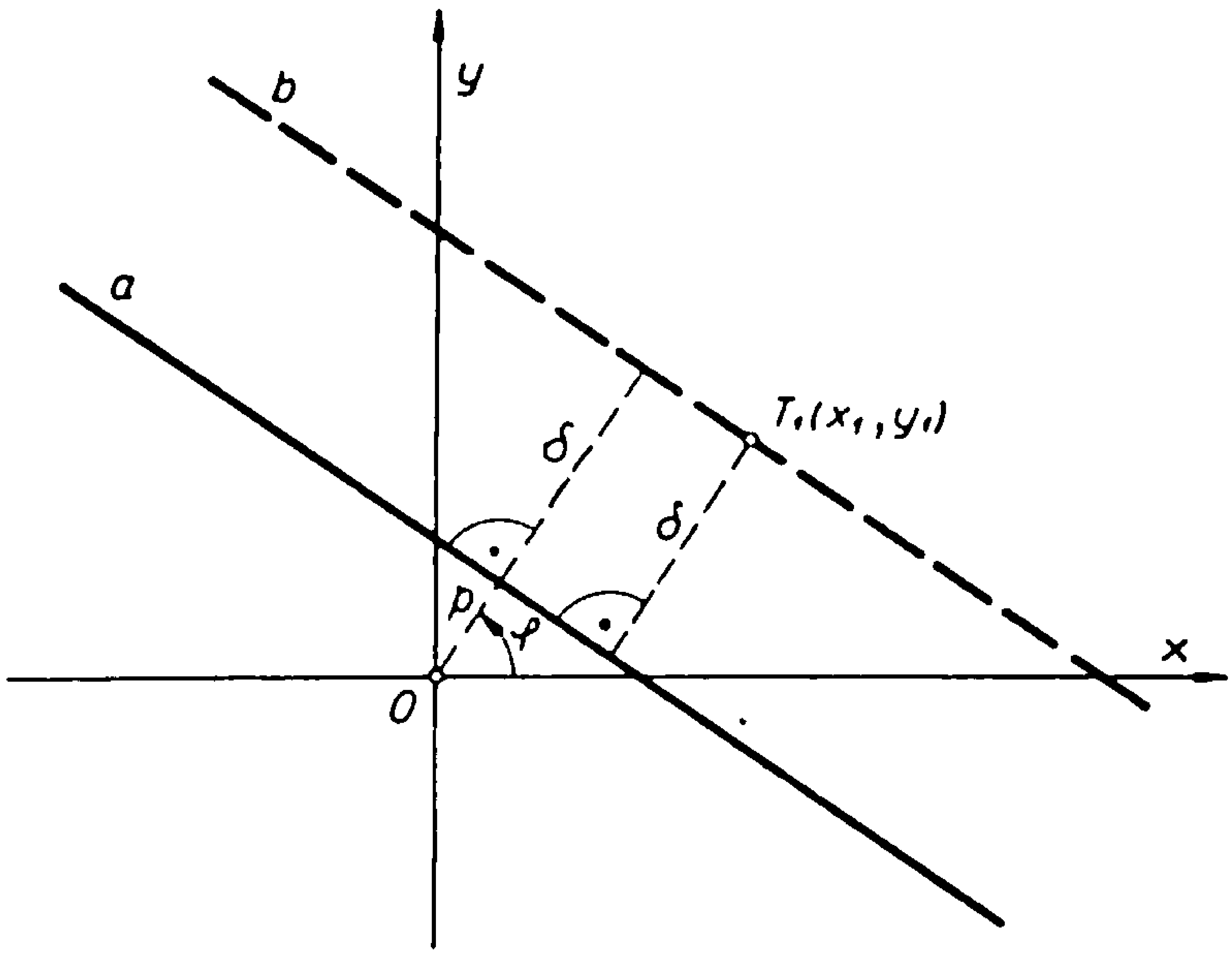
(na sl. 87 pravac b narisan je crtkano).

Tačka T_1 (x_1, y_1) leži na tom pravcu, dakle:

$$x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - (p + \delta) = 0,$$

a odatle je:

$$\delta = x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p.$$



Sl. 87

Da smo tačku T_1 uzeli na onoj strani pravca na kojoj leži ishodište O koordinatnog sustava, dobili bismo:

$$\delta = -(x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p).$$

Prema tome općenito:

$$\delta = \pm (x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p). \tag{23}$$

Udaljenost δ zadane tačke T_1 (x_1, y_1) od pravca određuje se tako da se jednadžba pravca napiše u normalnom obliku: $x \cos \varphi + y \cos \varphi - p = 0$, u nju se uvrste koordinate tačke T_1 i dobivenoj za δ vrijednosti promijeni predznak, ako je negativna.

Pozitivna vrijednost δ znači, dakle, da zadana tačka T_1 i ishodište O koordinatnog sustava leže na različitim stranama pravca, dok negativna vrijednost pokazuje da obje tačke T_1 i O leže na istoj strani pravca.

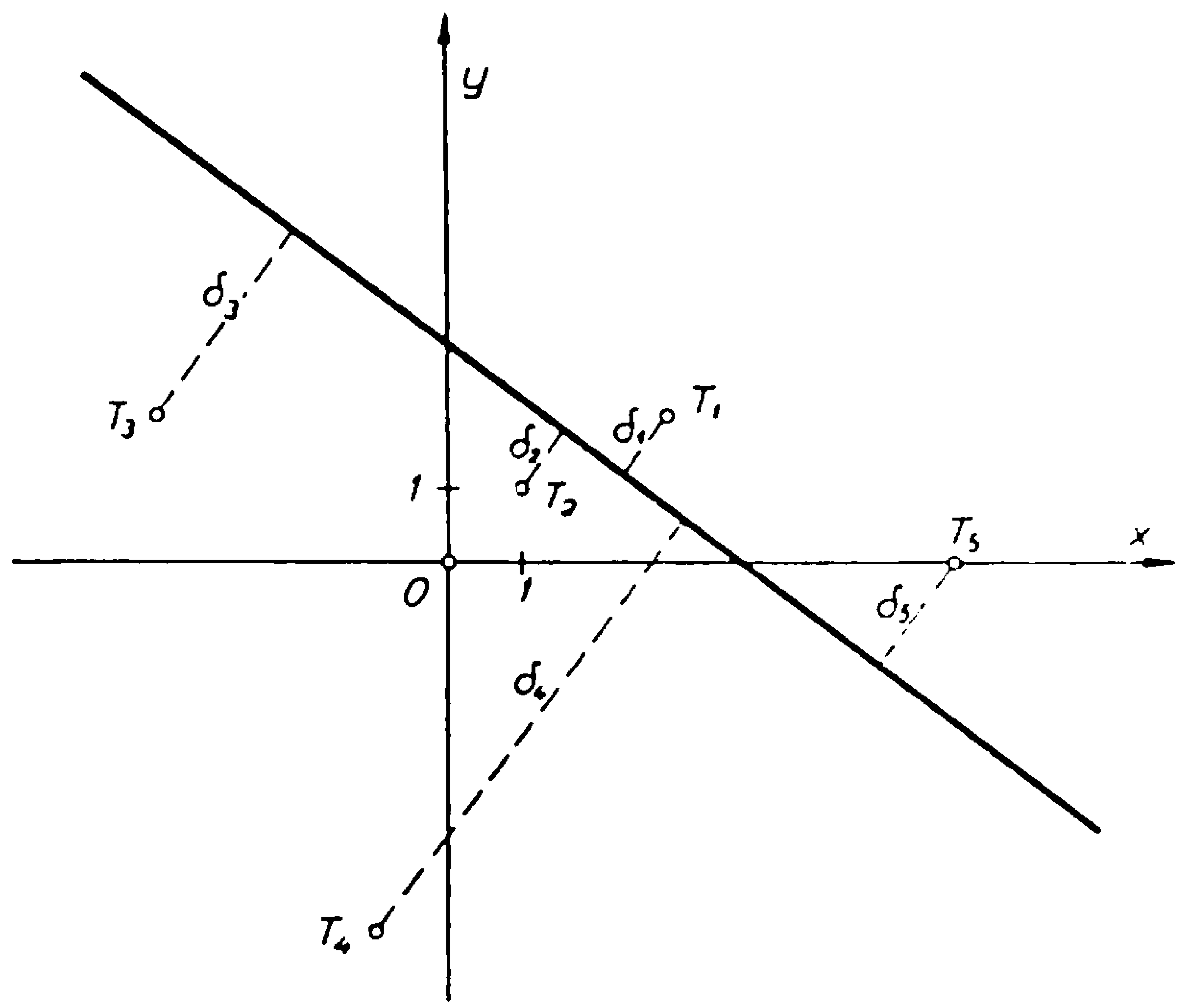
Primjedba: p u jednadžbi $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$ daje neposredno udaljenost ishodišta od pravca (vidi sl. 87).

Primjer :

Neka se odrede udaljenosti tačaka T_1 (3, 2), T_2 (1, 1), T_3 (— 4, 2), T_4 (— 1, — 5), T_5 (7, 0) od pravca $y = -\frac{3}{4}x + 3$. (Vidi sl. 88).

$$y = -\frac{3}{4}x + 3 \;/\; \cdot 4$$

$$3x + 4y - 12 = 0.$$



Sl. 88

Prema (18a) normalni oblik:

$$\frac{3x + 4y - 12}{+\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0$$

ili:

$$\frac{3x + 4y - 12}{5} = 0.$$

Prema (23):

Za tačku T_1 (3, 2):

$$\delta_1 = +\frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 - 12}{5} = 1.$$

Za tačku T_2 (1, 1):

$$\delta_2 = -\frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 12}{5} = 1.$$

Za tačku T_3 (— 4, 2):

$$\delta_3 = -\frac{3 \cdot (-4) + 4 \cdot 2 - 12}{5} = \frac{16}{5} = 3{,}2.$$

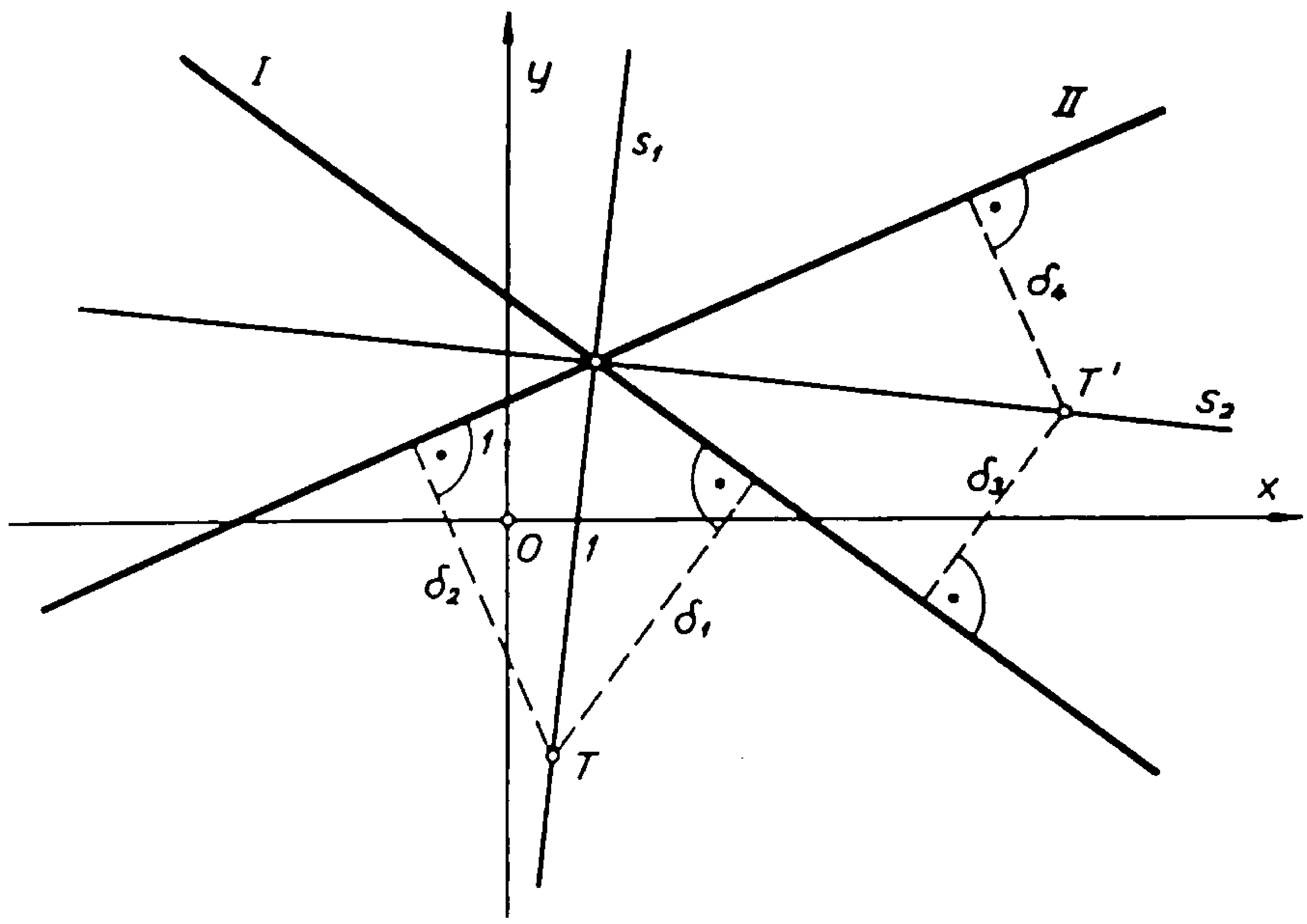
Za tačku T_4 (— 1, — 5):

$$\delta_4 = -\frac{3 \cdot (-1) + 4 \cdot (-5) - 12}{5} = 7.$$

Za tačku T_5 (7, 0):

$$\delta_5 = + \frac{3 \cdot 7 + 4 \cdot 0 - 12}{5} = \frac{9}{5} = 1{,}8.$$

7. SIMETRALA KUTA



Sl. 89

Zadane su jednadžbe dvaju pravaca I i II u normalnom obliku:

$$\text{I:} \quad x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1 - p_1 = 0$$

$$\text{II:} \quad x \cos \varphi_2 + y \sin \varphi_2 - p_2 = 0.$$

Traže se jednadžbe simetrala s_1 i s_2 kutova što ih zatvaraju ti pravci (vidi sl. 89).

Kako su sve tačke simetrale kuta jednako udaljene od krakova toga kuta, bit će za bilo koju tačku $T\,(x, y)$ simetrale s_1:

$\delta_1 = \delta_2$, a prema (23):

$\delta_1 = -(x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1 - p)$

(— , jer tačke T i O leže na istoj strani pravca I) i

$\delta_2 = -(x \cos \varphi_2 + y \sin \varphi_2 - p)$

(— s istog razloga).

Uvrštenje u $\delta_1 = \delta_2$ daje jednadžbu simetrale s_1:

$$x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1 - p_1 - (x \cos \varphi_2 + y \sin \varphi_2 - p_2) = 0. \qquad (24)$$

Na isti način za bilo koju tačku $T'\,(x, y)$ simetrale s_2:

$$\delta_3 = \delta_4.$$

Prema (23):

$$\delta_3 = + (x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1 - p_1)$$

(+ , jer tačka T' i O leže na različitim stranama pravca I) i

$$\delta_4 = - (x \cos \varphi_2 + y \sin \varphi_2 - p_2).$$

Uvrštenje u $\delta_3 = \delta_4$ daje jednadžbu simetrale s_2:

$$(x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1 - p_1) + (x \cos \varphi_2 + y \sin \varphi_2 - p_2) = 0. \qquad (24a)$$

Jednadžbe simetrala kutova što ih čine dva pravca dobiju se tako, da se jednadžbe pravca napišu u normalnom obliku, pa se najprije oduzmu, a onda zbroje. Oduzimanje daje jednadžbu simetrale onoga kuta unutar kojeg leži ishodište koordinatnog sustava.

Izračunamo li iz (24) i (24a) koeficijente smjera simetrala s_1 i s_2, vidjet ćemo da su ti koeficijenti smjera recipročni i protivnog predznaka, dakle prema (22):

$$s_1 \perp s_2$$

Primjer:

Treba napisati jednadžbe simetrala kutova što ih čine pravci:

I : $3x + 4y - 15 = 0$

II : $5x - 12y + 26 = 0$ (vidi sliku 89, koja prikazuje zadane pravce)

Prelazimo na normalni oblik:

Prema (18a)

$$\text{I:} \quad 3x + 4y - 15 = 0 \quad \Big| \; : +\sqrt{A^2 + B^2} = + \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\text{II:} \quad 5x - 12y + 26 = 0 \quad \Big| \; : -\sqrt{A^2 + B^2} = - \sqrt{25 + 144} = - 13.$$

$$\text{I:} \quad \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 3 = 0$$

$$\text{II:} \quad -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0 \qquad \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$$

$$s_1: \quad \frac{3}{5}x + \frac{5}{13}x + \frac{4}{5}y - \frac{12}{13}y - 3 + 2 = 0 \quad | \cdot 65$$

$$s_2: \quad \frac{3}{5}x - \frac{5}{13}x + \frac{4}{5}y + \frac{12}{13}y - 3 - 2 = 0 \quad | \cdot 65$$

$$s_1: \quad 39x + 25x + 52y - 60y - 65 = 0$$

$$s_2: \quad 39x - 25x + 52y + 60y - 325 = 0$$

ili: s_1 : $\underline{64x - 8y - 65 = 0}$ ili $\underline{y = 8x - \frac{65}{8}}$.

s_2 : $\underline{14x + 112y - 325 = 0}$ ili $\underline{y = -\frac{1}{8}x + \frac{325}{112}}$.

Koeficijent smjera s_1 : $a_1 = 8$

Koeficijent smjera s_2 : $a_2 = -\frac{1}{8}$, dakle $s_1 \perp s_2$.

§ 8. KRUŽNICA

1. DEFINICIJA

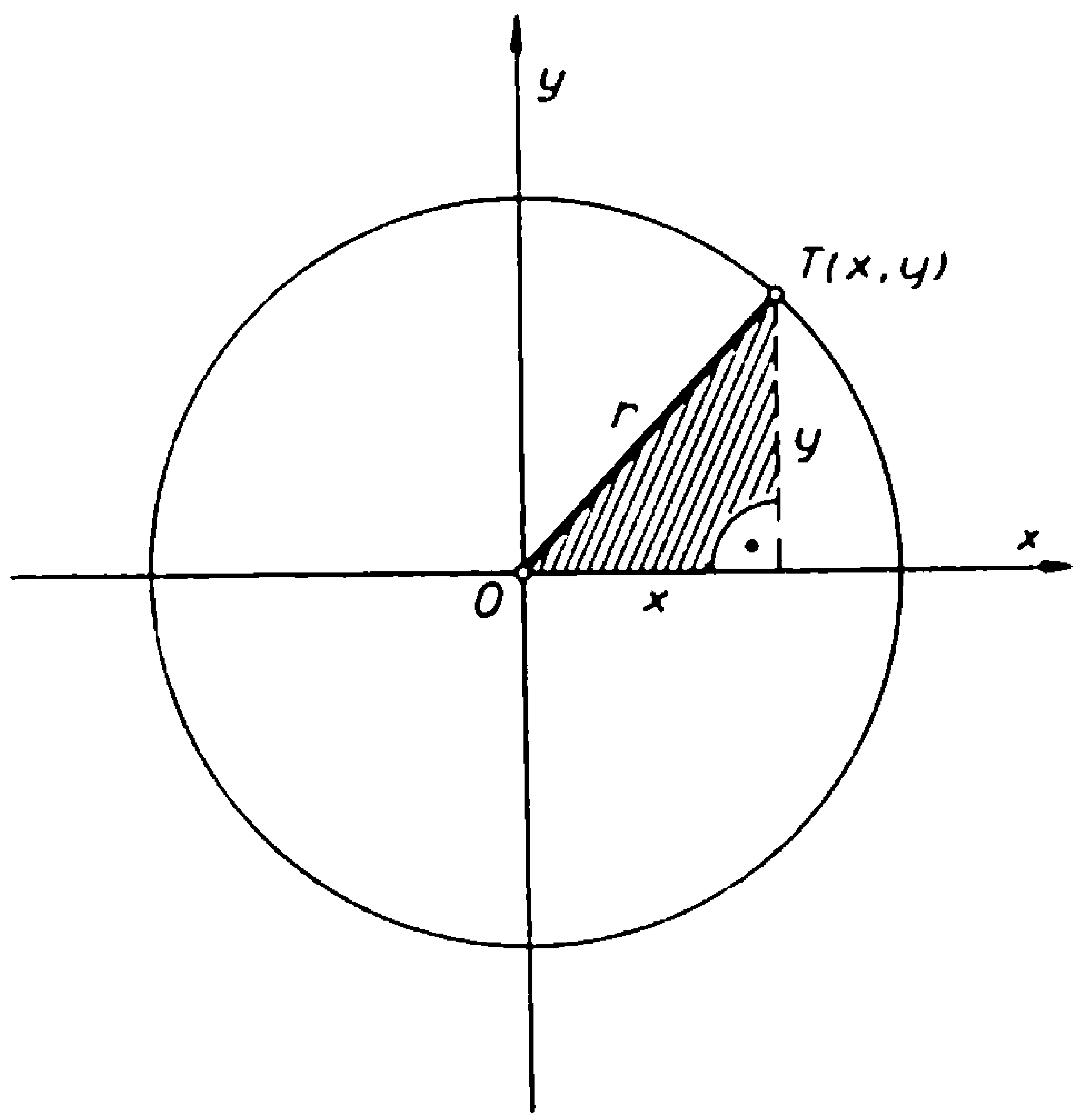
Kružnica je geometrijsko mjesto tačaka u ravnini jednako udaljenih od zadane čvrste tačke koja se zove središte kružnice.

Udaljenost svake tačke kružnice od njena središta S jest polumjer (radij) kružnice r (vidi sl. 90).

2. JEDNADŽBE KRUŽNICE

a) Središnja jednadžba kružnice polumjera r

Zamislimo koordinatni sustav položen kroz središte kružnice polumjera r. Tada za bilo koju tačku T (x, y) kružnice vrijedi prema slici 90 po Pitagorinu poučku jednadžba:



Sl. 90

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{25}$$

koja znači da je kvadrat udaljenosti svake tačke od ishodišta jednak r^2. Odatle se dobije eksplicitni oblik jednadžbe kružnice:

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}. \tag{25a}$$

Predznak plus daje gornju, a predznak minus donju polukružnicu.

Poseban slučaj: Jedinična kružnica, tj. kružnica kojoj je polumjer $r = 1$.

Iz (25) i (25a) slijedi za $r = 1$:

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{25b}$$

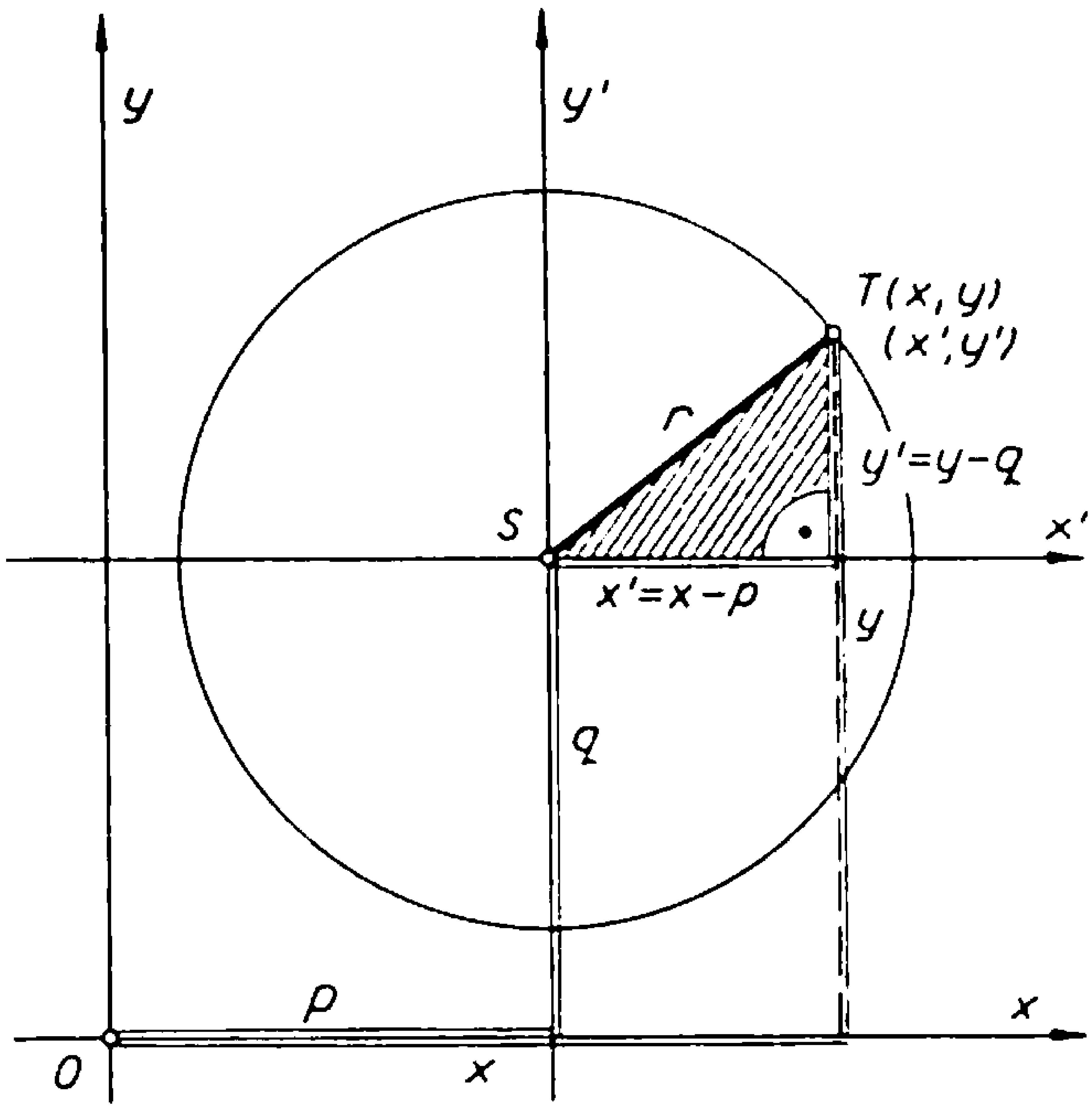
$$y = \pm\sqrt{1 - x^2} \tag{25c}$$

b) Opća jednadžba kružnice

Ako središte S kružnice polumjera r ima koordinate p i q, jednadžba kružnice prima oblik:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2, \tag{26}$$

jer s obzirom na koordinatni sustav $X' O' Y'$ ima kružnica prema (25) jednadžbu $x'^2 + y'^2 = r^2$, gdje je $x' = x - p$, a $y' = y - q$ (vidi sl. 91).



Sl. 91

Posebni slučajevi:

1) Ako je $p = 0$, središte S leži na osi Y:

$$x^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

2) Ako je $q = 0$, središte S leži na osi X:

$$(x - p)^2 + y^2 = r^2.$$

3) Ako je $p = 0$ i $q = 0$, središte S pada u ishodište, pa se dobiva središnja jednadžba kružnice (25).

4) Ako je $p = \pm r$, kružnica dira os Y:

$$(x \mp r)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

5) Ako je $q = \pm r$, kružnica dira os X:

$$(x - p)^2 + (y \mp r)^2 = r^2.$$

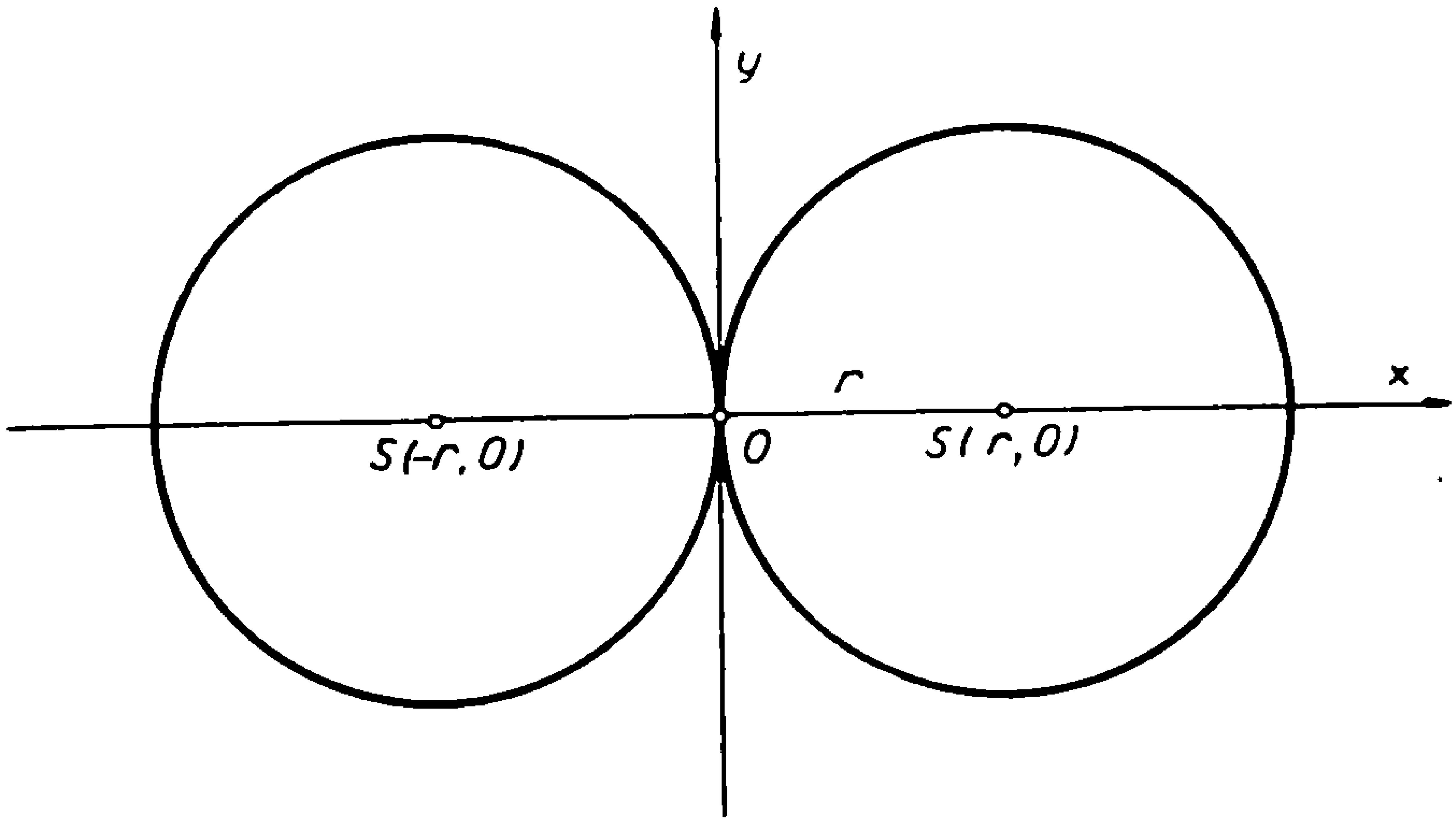
6) Ako je $p = \pm r$ i $q = \pm r$, kružnica dira obje koordinate osi:

$$(x \mp r)^2 + (y \mp r)^2 = r^2.$$

Nariši sve te posebne položaje kružnice!

7) Ako je $p = r$ i $q = 0$, središte kružnice leži na osi X, a kružnica prolazi ishodištem:

$$\left.\begin{aligned} &(x - r)^2 + y^2 = r^2 \\ \text{ili:}\quad & y^2 = 2r\,x - x^2. \end{aligned}\right| \tag{27}$$



Sl. 92

To je vršna jednadžba kružnice (desna kružnica na sl. 92).

8) Sličan slučaj dobije se ako je:

$$\begin{aligned} &p = -r \text{ i } q = 0: \\ &y^2 = -2rx - x^2 \end{aligned} \tag{27a}$$

(lijeva kružnica na slici 92).

Izvedemo li operacije naznačene u formuli (26), dobit ćemo:

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0,$$

a ako označimo:

$$-p = D$$

$$-q = E$$

$$p^2 + q^2 - r^2 = F,$$

primit će opća jednadžba kružnice oblik:

$$x^2 + y^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0. \tag{28}$$

Ima li zadana jednadžba drugog stupnja u x i y oblik (28), ona predočuje kružnicu čije se koordinate središta p i q i polumjer r određuju tako da se članovi sa x i članovi sa y nadopune na potpune kvadrate. Na taj način svodi se jednadžba (28) na oblik (26). (Vidi također § 12, 2).

Nadopunjavanje se vrši tako da se lijevoj i desnoj strani jednadžbe dodaju kvadrati polovine koeficijenata od x i od y.

Primjeri:

1. $$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$
$$x^2 - 4x + y^2 + 6y = 12$$
$$(x^2 - 4x + 2^2) + (y^2 + 6y + 3^2) = 12 + 4 + 9$$
$$\underline{(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25}$$
$$\underline{p = 2}; \quad \underline{q = -3}; \quad \underline{r = 5}.$$

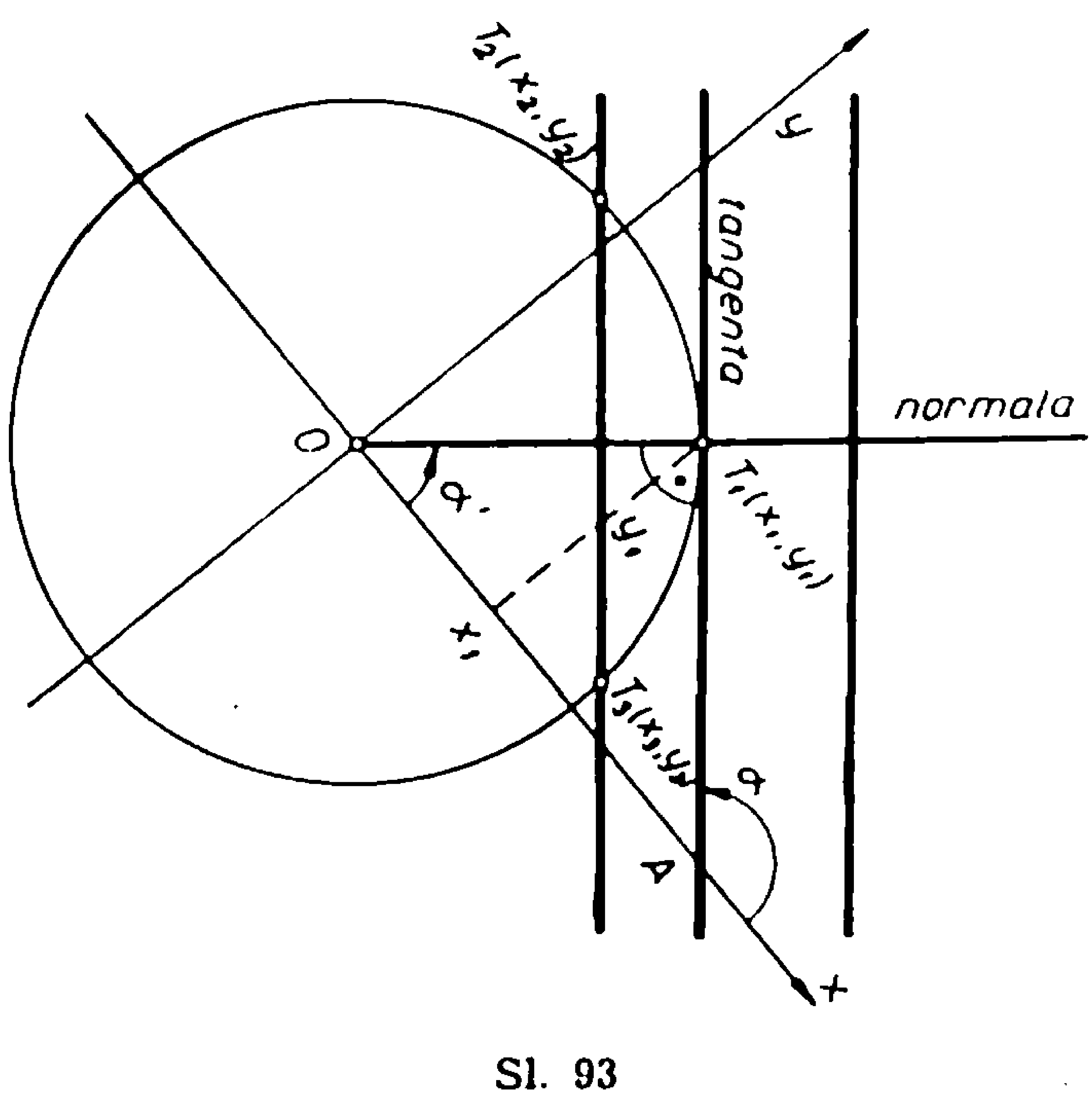
2. $$3x^2 + 3y^2 + 6x - 12y - 13 = 0 \,/\, : 3$$
$$x^2 + 2x + y^2 - 4y = \frac{13}{3}$$
$$(x^2 + 2x + 1^2) + (y^2 - 4y + 2^2) = \frac{13}{3} + 1 + 4$$
$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{28}{3}$$
$$\underline{p = -1}, \quad \underline{q = 2}, \quad r = \sqrt{\frac{28}{3}} = \sqrt{\frac{28 \cdot 3}{3 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{84}}{3} = \underline{\frac{2}{3}\sqrt{21}}.$$

3. $$x^2 + y^2 + 4y = 12$$
$$(x + 0)^2 + (y + 4y + 2^2) = 12 + 4$$
$$(x + 0)^2 + (y + 2)^2 = 16$$
$$\underline{p = 0}, \quad \underline{q = -2}, \quad \underline{r = 4}.$$

3. PRAVAC I KRUŽNICA

a) Položaj pravca spram kružnice. Uvjetne jednadžbe

Kako se vidi iz slike 93, pravac može prema kružnici zauzimati jedan od slijedećih položaja:



Sl. 93

1) ili pravac siječe kružnicu u dvjema tačkama,
2) ili dira kružnicu u jednoj tački,
3) ili prolazi izvan kružnice.

Riješimo li, dakle, sustav jednadžbi koji sačinjavaju jednadžba kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ i jednadžba pravca $y = kx + l$, dobit ćemo:

za slučaj 1) dva para rješenja x_2, y_2 i x_3, y_3, koja odgovaraju presjecištima T_2 i T_3;

za slučaj 2) jedan par rješenja x_1, y_1, koji odgovara diralištu T_1 tangente, i

za slučaj 3) par konjugirano kompleksnih rješenja (vidi sl. 93).

Rješenje sustava $\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = kx + l \end{cases}$ ili koordinate presjecišta pravca i kružnice glase:

$$\left.\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-kl \pm \sqrt{r^2(k^2+1) - l^2}}{1 + k^2} \\ y_{1,2} &= kx_{1,2} + l. \end{aligned}\right| \qquad \text{(a)}$$

Da bi pravac $y = kx + l$ dirao kružnicu, moramo za x i y dobiti samo po jedno rješenje, a to je samo tako moguće, da je izraz pod korijenom (diskriminanta D) u gornjoj formuli za $x_{1,2}$ jednak nuli, tj. $r^2(k^2 + 1) - l^2 = 0$ ili $r^2k^2 + r^2 - l^2 = 0$, pa je:

$$\underline{l^2 = r^2(1 + k^2).} \qquad (29)$$

T o j e u v j e t k o j i m o r a z a d o v o l j i t i p r a v a c $y=kx+l$, o d n o s n o n j e g o v k o e f i c i j e n t s m j e r a k i o d s j e č a k l n a o s i Y d a b u d e t a n g e n t o m k r u ž n i c e s a s r e d i š t e m u i s h o d i š t u: $x^2 + y^2 = r^2$.

U tom slučaju, tj. za $D = 0$, daju izrazi (a) koordinate dirališta T_1: $x_1 = -\frac{kl}{1+k^2}$ i $y_1 = kx_1 + l$ ili uzevši u obzir da je prema (29) $1 + k^2 = \frac{r^2}{l^2}$ dobivamo k o o r d i n a t e d i r a l i š t a

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\frac{kr^2}{l} \\ y_1 &= \frac{r^2}{l} \end{aligned}\right| \qquad \text{(29a)}$$

Ponovivši ista razmatranja i isti postupak koji smo naveli kod izvoda uvjetne jednadžbe (29), dolazimo do jednadžbe:

$$(-kp + q - l)^2 = r^2(1 + k^2), \qquad (30)$$

koja je u v j e t d a j e p r a v a c $y=kx+l$ t a n g e n t a n a k r u ž n i c u:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Koordinate dirališta tangente određujemo tako da zajedno riješimo zadanu jednadžbu kružnice i dobivenu jednadžbu tangente. Formule (29a) vrijede samo za kružnicu sa središtem u O (0,0)!

Uvjetne jednadžbe (29) i (30) primijenjuju se u svim slučajevima, kad nije zadano dirailište tražene tangente.

Primjeri:

1. Neka se na kružnicu $x^2 + y^2 = 6$ povuku tangente koje su usporedne s pravcem $x - 2y - 6 = 0$ i odrede koordinate dirališta tih tangenata!

Jednadžba tangente: $y = kx + l$.

$$k = ? \quad l = ?$$

Iz $x - 2y - 6 = 0$ slijedi:

$$y = \frac{x}{2} - 3, \text{ odatle:}$$

koeficijent smjera pravca $k = \frac{1}{2}$ = koeficijent smjera tangente.

Uvrštenje $k = \frac{1}{2}$ i $r^2 = 6$ u uvjetnu jednadžbu (29) $l^2 = r^2(1 + k^2)$ daje:

$$l^2 = 6\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{30}{4},$$

$$l = \pm\frac{\sqrt{30}}{2},$$

pa iz $y = kx + l$ za $k = \frac{1}{2}$ i $l = \pm\frac{\sqrt{30}}{2}$

dobivamo:

$$\underline{y = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{30}}{2}} \quad \text{ili} \quad \underline{x - 2y + \sqrt{30} = 0}$$

$$\underline{y = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{30}}{2}} \quad \text{ili} \quad \underline{x - 2y - \sqrt{30} = 0.}$$

tražene jednadžbe tangenata.

Dirališta tangenata dobivamo ili iz formula (29a) ili rješavajući sustav jednadžbi koji sastavljaju jednadžba kružnice i jednadžba tangente, pri čemu pamtimo da diskriminanta mora biti jednaka nuli, jer tangenta ima s kružnicom samo jednu zajedničku tačku. Ukoliko je diskriminanta $D \neq 0$ moramo tražiti pogrešku u izračunatoj jednadžbi tangente.

Primijenimo taj drugi način.

Uvrštenje: $y = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{30}}{2}$ u $x^2 + y^2 = 6$ daje:

$$x^2 + \frac{x^2}{4} + \frac{\sqrt{30}}{2}x + \frac{30}{4} = 6 / \cdot 4$$

$$5x^2 + 2\sqrt{30}\,x + 6 = 0 / :5$$

$$x^2 + \frac{2}{5}\sqrt{30}\,x + \frac{6}{5} = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{5}\sqrt{30} \pm \sqrt{\frac{30}{25} - \frac{30}{25}}$$

Diskriminanta $D = 0$!

$$x_1 = -\frac{\sqrt{30}}{5}.$$

$$y_1 = \frac{x_1}{2} + \frac{\sqrt{30}}{2} = -\frac{\sqrt{30}}{10} + \frac{\sqrt{30}}{2} = \frac{2}{5}\sqrt{30}$$

$$y_1 = \frac{2}{5}\sqrt{30}.$$

Diralište prve tangente $T_1 \left(-\frac{\sqrt{30}}{5},\ \frac{2}{5}\sqrt{30}\right)$

Na isti način dobivamo diralište druge tangente $T_2 \left(\frac{\sqrt{30}}{5},\ -\frac{2}{5}\sqrt{30}\right)$.

Mogli bismo napisati koordinate dirališta T_2 druge tangente bez ikakvog računanja, samo znajući koordinate dirališta T_1 prve tangente, jer kako dirališta dviju usporednih tangenata leže, na krajevima istog promjera kružnice, njihove se koordinate razlikuju samo u predznacima.

Prikaži grafički zadane kružnice i tangente!

2. Neka se na kružnicu $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$ povuku tangente okomite na pravac $24x - 7y + 2 = 0$.

Jednadžba tangente: $\quad y = kx + l.$

$$k = ? \quad l = ?$$

Iz $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$ slijedi:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = 6 + 1 + 9$$

ili:

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16.$$

Dakle: $p = 1$, $q = 3$, $r^2 = 16$.

Iz $24x - 7y + 2 = 0$ ili $y = \frac{24}{7}x + \frac{2}{7}$ imamo:

Koeficijent smjera pravca $k_1 = \frac{24}{7}$, a tangente $k = -\frac{1}{k_1} = -\frac{7}{24}$.

Uvrštenje $p = 1$, $q = 3$, $r^2 = 16$ i $k = -\frac{7}{24}$ u uvjetnu jednadžbu (30) $(-kp + q - l)^2 = r^2(l + k^2)$ daje:

$$\left(+\frac{7}{24} + 3 - l\right)^2 = 16\left(1 + \frac{49}{576}\right)$$

odatle:

$$\frac{(79 - 24l)^2}{576} = \frac{16 \cdot 625}{576}$$

ili:

$$79 - 24l = \pm 4 \cdot 25$$

ili:

$$l_{1,2} = \frac{79 \mp 100}{24}, \text{ pa je:}$$

$$l_1 = -\frac{21}{24} = -\frac{7}{8}; \quad l_2 = \frac{179}{24}.$$

Uvrštenje u $y = kx + l$ daje konačno:

$y = -\frac{7}{24}x - \frac{7}{8}$ ili $7x + 24y + 21 = 0$	Tražene jednadžbe tangenata.
$y = -\frac{7}{24}x + \frac{179}{24}$ ili $7x + 24y - 179 = 0$	

Odredi koordinate dirališta tangenata i prikaži grafički čitav zadatak!

b) Jednadžbe tangente i normale povučenih u zadanoj tački kružnice

1) na kružnicu $x^2 + y^2 = r^2$.

Uzmimo sada obrnuto, da su nam poznate koordinate x_1 i y_1 dirališta T_1, a tražimo jednadžbu tangente na kružnicu u toj tački T_1. U tu svrhu računamo iz izraza (29a) kooficijent smjera tangente $k = \operatorname{tg} \alpha$ i odsječak l na osi Y.

Podijelivši jednadžbe sustava (29a) dobivamo:

$$k = -\frac{x_1}{y_1}$$

a iz druge jednadžbe slijedi:

$$l = \frac{r^2}{y_1} \tag{31}$$

Uvrštenje tih izraza u jednadžbu $y = kx + l$ daje traženu jednadžbu tangente na kružnicu $x^2 + y^2 = r^2$ u zadanoj tački $T_1(x_1, y_1)$ kružnice:

$$y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{r^2}{y_1} / \cdot y_1$$

ili

$$xx_1 + yy_1 = r^2. \tag{32}$$

Normala kružnice jest pravac koji je u diralištu okomit na tangentu, dakle će prema (22) i (31) njen koeficijent smjera u istoj tački kružnice $T_1(x_1, y_1)$ biti $k = \frac{y_1}{x_1}$.

Uvrštenje tog izraza u formulu (19) daje:

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1),$$

a odatle, uklonivši zagrade, dobivamo jednadžbu normale na kružnicu $x^2 + y^2 = r^2$ u tački $T_1(x_1, y_1)$ kružnice:

$$y = \frac{y_1}{x_1}x \tag{33}$$

ili:

$$yx_1 - xy_1 = 0. \tag{33a}$$

Iz jednadžbe normale vidimo da je to pravac koji prolazi ishodištem koordinatnog sustava, a to smo i očekivali za kružnicu kojoj je središte u ishodištu, jer se normala kružnice podudara s polumjerom povučenim u diralište.

Do jednadžbe tangente i normale na kružnicu $x^2 + y^2 = r^2$ u zadanoj tački T_1 (x_1, y_1) kružnice možemo doći i drugim putem: prema (19) jednadžba pravca kroz tačku T_1 (x_1, y_1) glasi: $y - y_1 = a\,(x - x_1)$.

Iz slike 94 slijedi: $\alpha = \alpha' + 90^0$, a odatle je:

$$a = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(90^0 + \alpha') = -\operatorname{ctg} \alpha' = -\frac{x_1}{y_1}. \tag{31}$$

Uvrštenje daje: $y - y_1 = -\dfrac{x_1}{y_1}(x - x_1) / \cdot y_1$

$$yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$$

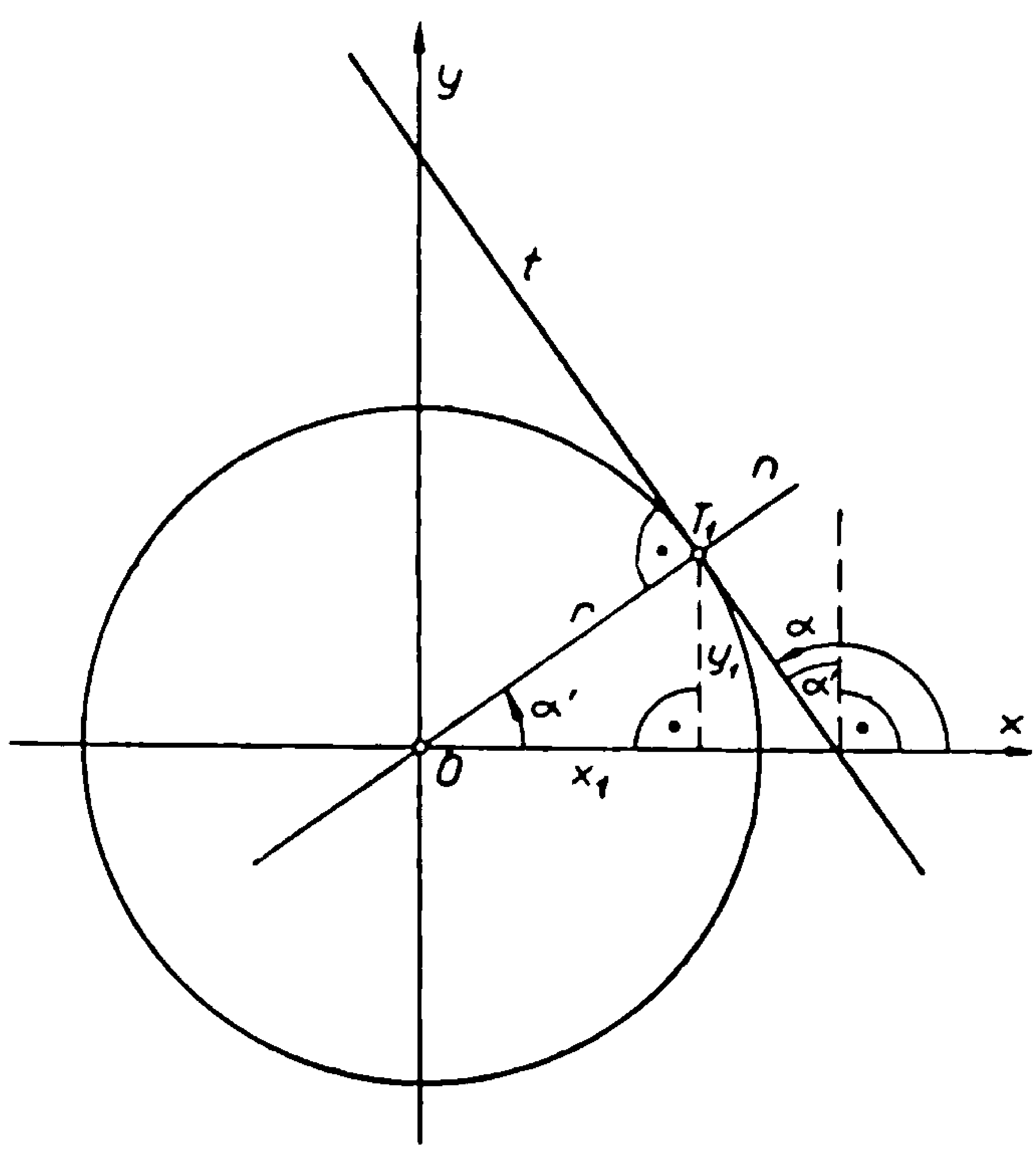
ili: $$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$$

ili: $$xx_1 + yy_1 = r^2, \tag{32}$$

jer tačka T_1 (x_1, y_1) leži na kružnici, pa uvrštenje $x = x_1$ i $y = y_1$ u $x^2 + y^2 = r^2$ daje $x_1^2 + y_1^2 = r^2$; isto se vidi i na sl. 94.

Normala prolazi ishodištem, dakle njena jednadžba glasi $y = kx$, a prema (22) i (31) $k = -\dfrac{1}{a} = \dfrac{y_1}{x_1}$. Uvrštenje daje:

$$y = \frac{y_1}{x_1} x. \tag{33}$$



Sl. 94

Primjer:

Treba napisati jednadžbe tangente i normale na kružnicu $x^2 + y^2 = 25$ u tački kružnice T_1 ($x_1 = 3$; $y_1 > 0$)!

Uvrštenje $x_1 = 3$ u zadanu jednadžbu kružnice daje: $9 + y^2 = 25$, odatle $y_{1,2} = \pm 4$, $y_1 = 4$ pa je T_1 (3, 4).

Prema (32):

$$\underline{3x + 4y - 25 = 0}$$

ili:

$$\underline{y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}}$$

tražene jednadžbe tangente.

Prema (33):

$$\underline{y = \frac{4}{3}x}$$

ili:

$$\underline{3y - 4x = 0}$$

tražene jednadžbe normale.

2) n a k r u ž n i c u $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$.

Jednadžba tangente na tu kružnicu u tački T_1 (x_1, y_1) kružnice lako se dobije iz jednadžbe (32), ako zamislimo da je koordinatni sustav translacijom prenesen u središte kružnice $S(p, q)$. S obzirom na formule (5a) imamo:

$$(x - p)(x_1 - p) + (y - q)(y_1 - q) = r^2 \tag{34}$$

tj. od svakog x jednadžbe $x^2 + y^2 = r^2$ oduzmi p, a od svakog y oduzmi q.

To je, dakle, j e d n a d ž b a t a n g e n t e n a k r u ž n i c u $(x-p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ s d i r a l i š t e m u t a č k i T_1 (x_1, y_1).

Njen koeficijent smjera je prema (31):

$$k = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q}. \tag{34a}$$

S obzirom na (22) bit će koeficijent smjera normale u tački T_1 (x_1, y_1) $k = \frac{y_1 - q}{x_1 - p}$, a jednadžba će normale glasiti prema (19):

$$y - y_1 = \frac{y_1 - q}{x_1 - p}(x - x_1). \tag{35}$$

Primjer:

Treba napisati jednadžbe tangente i normale na kružnicu

$x^2 + y^2 - 14x - 4y - 5 = 0$ u tački T_1 (10, 9),

$$(x^2 - 14x + 49) + (y^2 - 4y + 4) = 5 + 49 + 4$$

$$(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 58$$

$$p = 7;\quad q = 2;\quad r^2 = 58$$

Prema (34):

$$(x-7)(10-7)+(y-2)(9-2)=58$$

$$3x-21+7y-14=58$$

$\underline{3x+7y-93=0}$ tražena jednadžba tangente.

Prema (35):

$$y-9=\frac{9-2}{10-7}(x-10)$$

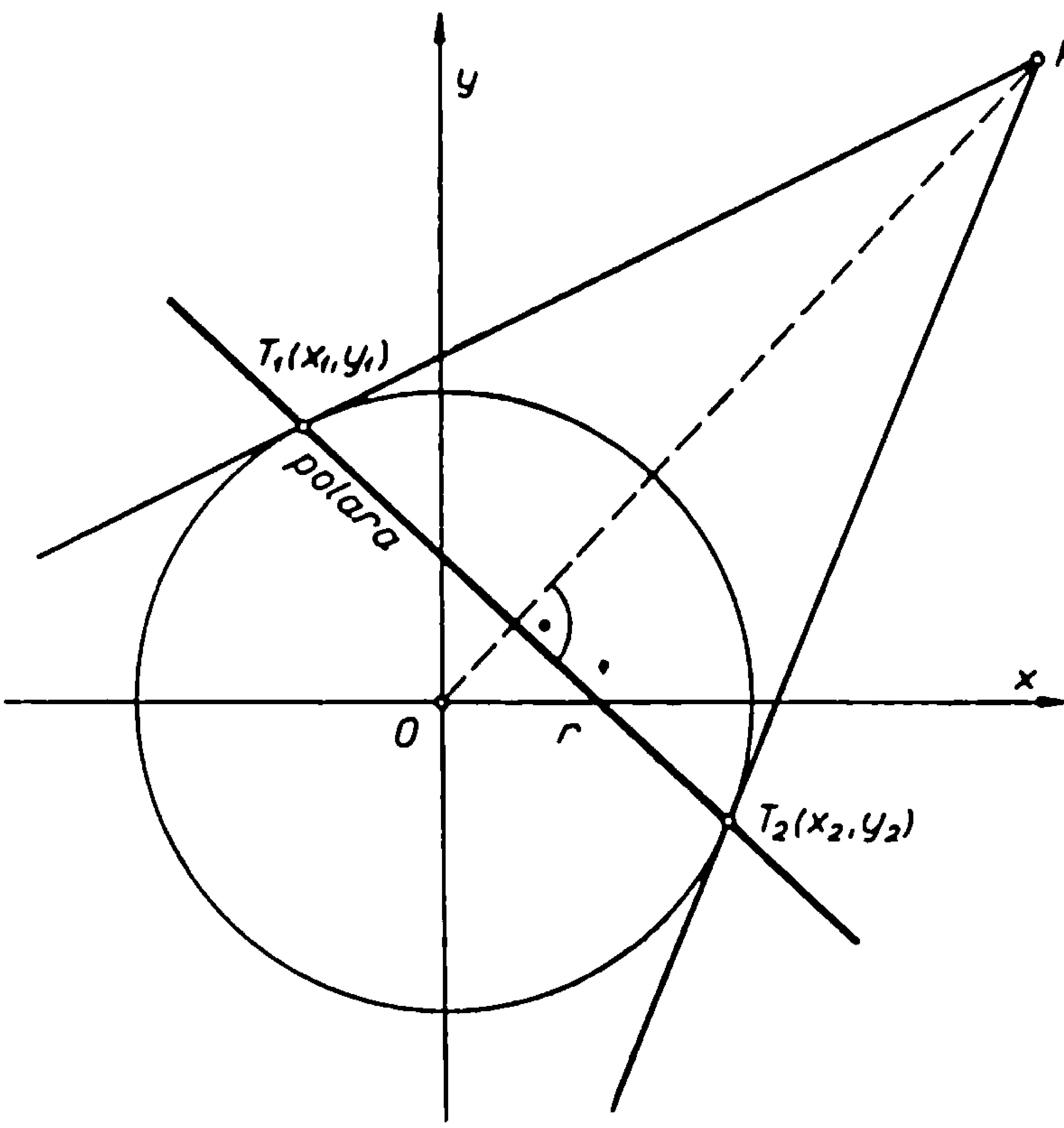
$$y-9=\frac{7}{3}(x-10)$$

$\underline{7x-3y-43=0}$ tražena jednadžba normale.

c) Jednadžbe tangenata povučenih iz zadane tačke izvan kružnice

1) na kružnicu $x^2+y^2=r^2$.

Riješimo sada pitanje, kako ćemo napisati jednadžbe tangenata povučenih na kružnicu $x^2+y^2=r^2$ iz zadane tačke $P(x_0, y_0)$ koja leži izvan kružnice (vidi sl. 95).



Sl. 95

I način: pomoću uvjetne jednadžbe.

Pretpostavimo li da tražene jednadžbe tangenata imaju oblik $y=kx+l$, možemo u tu jednadžbu uvrstiti koordinate x_0, y_0 tačke P, jer ta tačka leži na objema tangentama. Kao drugu jednadžbu uzmimo uvjetnu jednadžbu (29).

Na taj način dobivamo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= k\,x_0 + l \\ l^2 &= r^2\,(1 + k^2), \end{aligned}\right| \qquad (36)$$

iz kojeg možemo izračunati tražene veličine k i l. Druga jednadžba tog sustava je kvadratna, pa ćemo dobiti po dvije vrijednosti za koeficijent smjera k i za odsječak l, koje uvrstimo u jednadžbu $y = k\,x + l$, pa ćemo imati jednadžbe obiju tangenata.

II način: pomoću polare.

Polazi se od jednadžbe tangente $xx_1 + yy_1 = r^2$ (32), da se odrede koordinate dirališta T_1 i T_2. Budući da dirališta leže na kružnici $x^2 + y^2 = r^2$, a tačka $P\,(x_0, y_0)$ leži na tangentama, dobivamo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= r^2 \\ x_1^2 + y_1^2 &= r^2 \end{aligned}\right| \qquad (37)$$

iz kojih ćemo dobiti po dvije vrijednosti za x_1 i y_1, tj. koordinate dirališta $T_1\,(x_1, y_1)$ i $T_2\,(x_2, y_2)$. Uvrštenje tih vrijednosti u jednadžbu (32) daje jednadžbe traženih tangenata.

Druga jednadžba sustava (37) je linearna i predočuje pravac koji prolazi kroz oba dirališta T_1 i T_2, jer su koordinate tih dirališta korijeni sustava (37). Taj pravac $T_1\,T_2$ kojemu je jednadžba

$$x_0x + y_0y = r^2 \qquad (37a)$$

zove se **polara tačke** P **s obzirom na kružnicu**, a tačka P je **pol za pravac** $T_1\,T_2$. (Vidi sl. 95).

Prema tome jednadžbe tangenata na kružnicu $x^2 + y^2 = r^2$ iz tačke P dobiju se tako da se napiše prema (37a) jednadžba polare, pa se odrede presjecišta polare s kružnicom, tj. koordinate dirališta obiju tangenata, koje se uvrste u jednadžbu (32) $xx_1 + yy_1 = r^2$.

Spomenimo još:

a) da polara postoji i u tom slučaju kad pol P leži unutar kružnice, jer uvrštenje koordinata tog pola u jednadžbu polare (37a) daje realan pravac, ali polara u tom slučaju ne siječe kružnicu, nego prolazi izvan nje, pa kružnica nema realnih tangenata iz pola P;

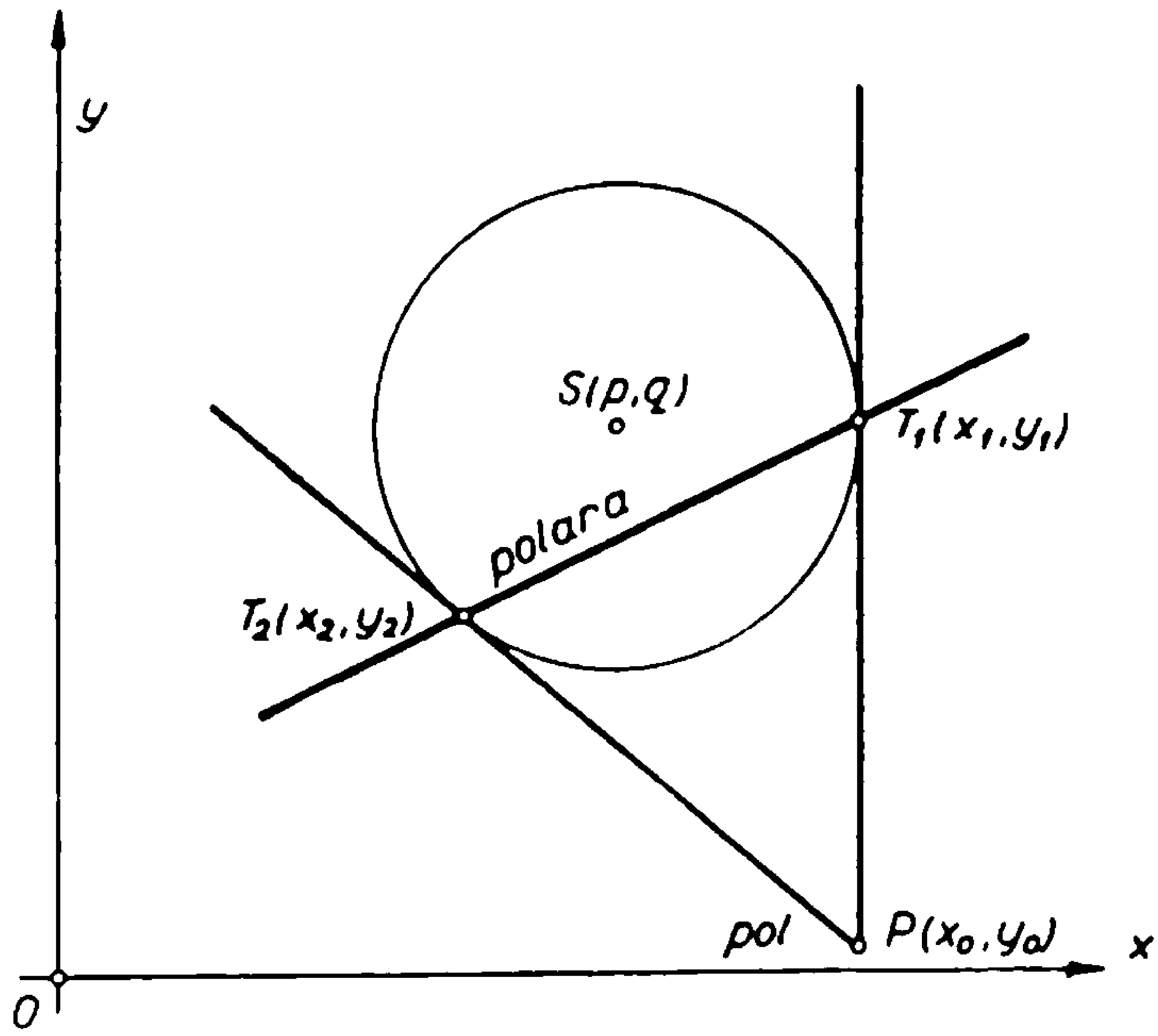
b) da je polara za pol, koji leži na kružnici, tangenta kružnice u polu, jer je tada jednadžba polare (37a) istovetna s jednadžbom tangente (32);

c) da je pravac PO, koji spaja pol P sa središtem kružnice O, okomit na polari, jer je jednadžba tog pravca prema (20): $y = \dfrac{y_0}{x_0}\,x$ ili $xy_0 - yx_0 = 0$, pa je koeficijent smjera tog pravca recipročan i protivnog predznaka s obzirom na koeficijent smjera polare, koji je prema (37a) $= -\dfrac{x_0}{y_0}$

(Vidi dalje primjer 1).

2) Na kružnicu $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$.

Na isti način dolazi se do jednadžbi tangenata povučenih na kružnicu $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ iz tačke P (x_0, y_0) koja leži izvan kružnice (vidi sl. 96).



Sl. 96

I način: pomoću uvjetne jednadžbe.

Iz sustava koji čini jednadžba tangenata $y=kx+l$, u koju se uvrste koordinate x_0, y_0 tačke P, i uvjetna jednadžba (30), tj. iz sustava

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= x_0k+l \\ (-kp+q-l)^2 &= r^2(1+k^2) \end{aligned}\right| \tag{38}$$

računaju se koeficijenti smjera k_1 i k_2 i odsječci na osi Y l_1 i l_2 traženih tangenata.

II način: pomoću polare.

Napiše se jednadžba polare, koja će sada prema jednadžbi (37a), a s obzirom na formule (5a), glasiti:

$$(x_0-p)\ (x-p)+(y_0-q)\ (y-q)=r^2, \tag{39}$$

pa se odrede sjecišta polare s kružnicom, tj. koordinate dirališta T_1 (x_1, y_1) i T_2 $(x_2\ y_2)$, koje se uvrste u jednadžbu tangente (34):

$(x-p)\ (x_1-p)+(y-q)(y_1-q)=r^2$ (vidi dalje primjer 2).

Primjeri:

Primjer 1.

Treba napisati jednadžbe tangenata povučenih na kružnicu $x^2+y^2=29$ iz tačke P $(7, -3)$ i odrediti koordinate dirališta tih tangenata (sl. 97)!

I način. $t \equiv y = kx + l \qquad k = ? \quad l = ?$

Prema (36):

$$\left.\begin{aligned} -3 &= 7k + l \\ l^2 &= 29(1 + k^2) \end{aligned}\right|$$

Iz prve jednadžbe:

$$l = -7k - 3. \qquad \text{(a)}$$

Uvrštenje u drugu jednadžbu daje:

$$(-7k - 3)^2 = 29(1 + k^2)$$

ili: $49k^2 + 42k + 9 = 29 + 29k^2$

ili: $20k^2 + 42k - 20 = 0 \; / : 20$

$$k^2 + 2{,}1k - 1 = 0$$

$$k_{1,2} = -1{,}05 \pm \sqrt{1{,}1025 + 1} = -1{,}05 \pm 1{,}45$$

$$k_1 = 0{,}4; \quad k_2 = -2{,}5.$$

Prema (a): $l_1 = -2{,}8 - 3 = -5{,}8$

$$l_2 = 17{,}5 - 3 = 14{,}5.$$

Uvrštenje u $y = kx + l$ daje:

$$\left.\begin{aligned} &\underline{y = 0{,}4x - 5{,}8} \\ &\underline{y = -2{,}5x + 14{,}5} \end{aligned}\right| \text{ tražene jednadžbe tangenata } t_1 \text{ i } t_2$$

ili u implicitnom obliku:

$$\underline{2x - 5y - 29 = 0}$$

$$\underline{5x + 2y - 29 = 0.}$$

Koordinate dirališta tangenata odredimo ovog puta pomoću formula (29a):

$$x_1 = -\frac{kr^2}{l}$$

$$y_1 = \frac{r^2}{l}.$$

U tu svrhu uvrstimo u prvu od tih formula $k = 0{,}4$ i $l = -5{,}8$. Dobivamo:

$$\underline{x_1 = 2.}$$

Uvrštenje $r^2 = 29$ i $l = -5{,}8$ u drugu formulu sustava (29a) daje:

$$\underline{y_1 = -5.}$$

Dakle $\underline{T_1\,(2, -5) \text{ je diralište tangente } t_1.}$

Na isti način uvrstivši u (29a) $k = -2{,}5$ i $r^2 = 29$, $l = 14{,}5$, dobivamo:

$$\underline{x_2 = 5 \quad \text{i} \quad y_2 = 2.}$$

Dakle $\underline{T_2\,(5, 2) \text{ je diralište tangente } t_2.}$

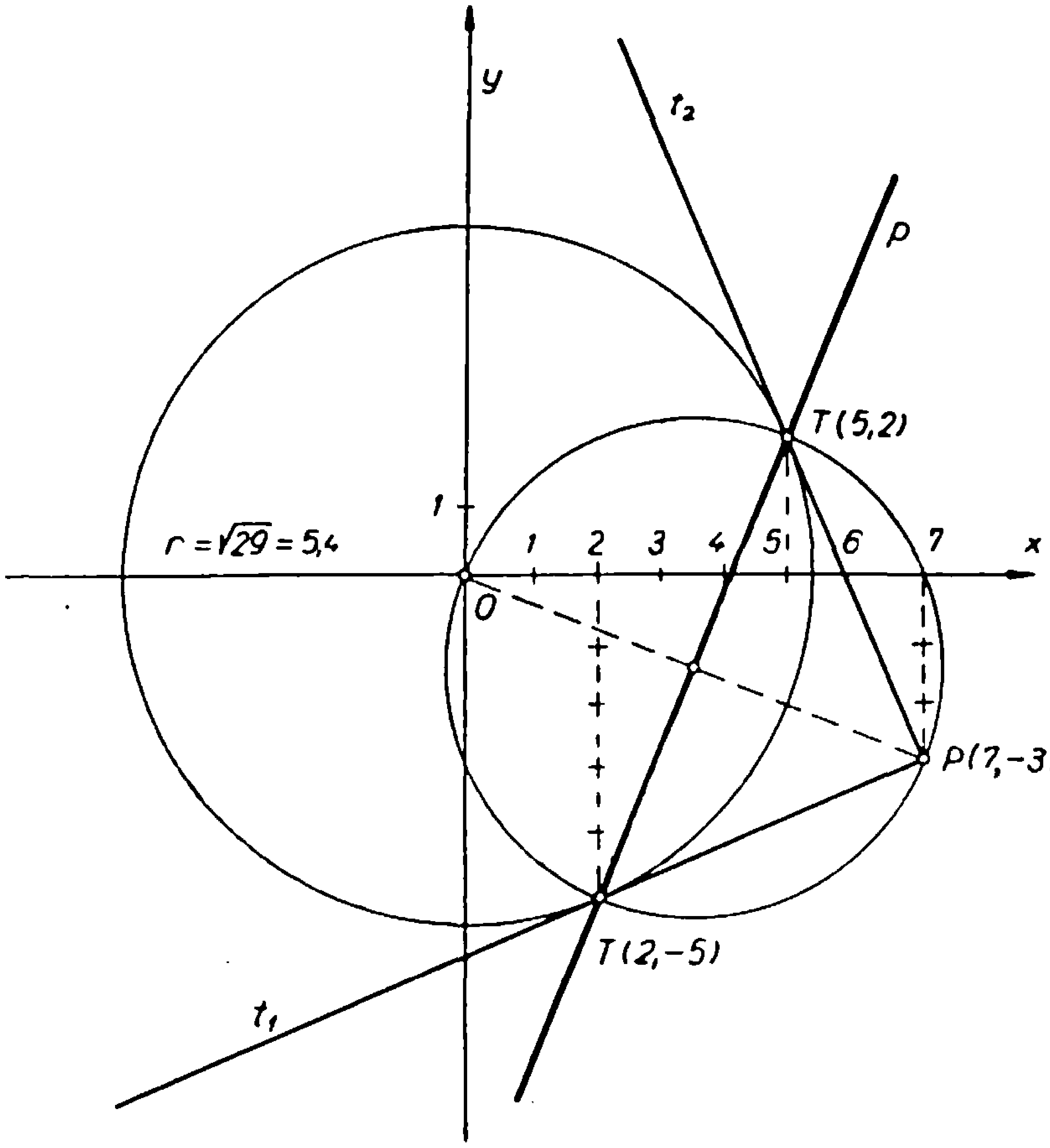
(Vidi sl. 97, u kojoj je taj primjer prikazan grafički).

Koordinate dirališta T_1 i T_2 možemo također dobiti rješavajući zajedno jednadžbu zadane kružnice i izračunate jednadžbe tangenata.

II način. $t \equiv xx_1 + yy_1 = r^2$. $\qquad x_1 = ? \quad y_1 = ?$

Jednadžba polare s obzirom na pol $P(7, -3)$ glasi prema (37a):

$$\underline{7x - 3y - 29 = 0.}$$



Sl. 97

Koordinate dirališta T_1 i T_2 dobit ćemo iz sustava:

$$\left.\begin{aligned} 7x - 3y &= 29 \\ x^2 + y^2 &= 29 \end{aligned}\right|$$

Iz prve jednadžbe slijedi:

$$y = \frac{1}{3}(7x - 29). \qquad \text{(a)}$$

Uvrštenje u drugu jednadžbu daje:

$$x^2 + \frac{1}{9}(7x - 29)^2 = 29 \,/\cdot 9$$

$$9x^2 + 49x^2 - 406x + 841 = 261$$

ili: $\quad 58x^2 - 406x + 580 = 0 \,/ : 58$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 2; \qquad x_2 = 5.$$

Prema (a) $y_1 = -5;\quad y_2 = 2.$

Dakle: $T_1\,(2, -5);\quad T_2\,(5, 2).$

Prema (32)

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 5y - 29 = 0 \\ 5x + 2y - 29 = 0 \end{array}\right|$$ jednadžbe tangenata t_1 i t_2. (Vidi sl. 97)

Primjer 2.

Treba napisati jednadžbe tangenata povučenih na kružnicu $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 7 = 0$ iz tačke $P\,(6, 2)$ i odrediti koordinate dirališta tih tangenata!

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = 7 + 9 + 4$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 20.$$

$$p = 3;\quad q = -2;\quad r^2 = 20.$$

1. način: $t \equiv y = kx + l$

Prema (38): $2 = 6k + l$

$$(-3k - 2 - l)^2 = 20\,(1 + k^2).$$

Iz 1. jednadžbe slijedi:

$$l = -6k + 2. \qquad \text{(a)}$$

Uvrštenje u 2. jednadžbu daje:

$$(-3k - 2 + 6k - 2)^2 = 20\,(1 + k^2)$$

ili: $(3k - 4)^2 = 20\,(1 + k^2)$

ili: $9k^2 - 24k + 16 = 20 + 20k^2$

ili: $11k^2 + 24k + 4 = 0.$

Odatle:

$$k_{1,2} = \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 176}}{22} = \frac{-24 \pm 20}{22}$$

$$k_1 = -\frac{2}{11};\qquad k_2 = -2.$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$l_1 = \frac{34}{11};\qquad l_2 = 14.$$

Dakle:

$$\left.\begin{array}{l} y = -\dfrac{2}{11}x + \dfrac{34}{11} \\ y = -2x + 14. \end{array}\right|$$ tražene jednadžbe tangenata.

ili u implicitnom obliku:

$$2x + 11y - 34 = 0$$

$$2x + y - 14 = 0.$$

Da bismo odredili koordinate dirališta x_1 i y_1 prve tangente, uvrstimo njenu jenadžbu $y = -\frac{2}{11}x + \frac{34}{11}$ u jednadžbu zadane kružnice $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 7 = 0$ i riješimo tako dobivenu kvadratnu jednadžbu. Budući da tangenta ima s kružnicom samo jednu zajedničku tačku, bit će diskriminanta $D = 0$.

Konačno dobivamo:

$$\underline{x_1 = \frac{19}{5}},$$

dok uvrštenje te vrijednosti za x_1 u jednadžbu tangente daje:

$$\underline{y_1 = \frac{12}{5}}.$$

Na isti način određujemo koordinate dirališta druge tangente. Dobivamo:

$$\underline{x_2 = 7}$$

$$\underline{y_2 = 0}.$$

2. način: $t \equiv (x - p)\,(x_1 - p) + (y - q)\,(y_1 - q) = r^2$

Jednadžba polare prema (39) glasi:

$$(6 - 3)\,(x - 3) + (2 + 2)\,(y + 2) = 20$$

ili: $3x - 9 + 4y + 8 = 20$

ili: $3x + 4y - 21 = 0$ jednadžba polare za pol $P\,(6,\ 2)$.

Koordinate dirališta T_1 i T_2 dobit ćemo iz sustava:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y - 21 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 4y - 7 = 0 \end{array}\right|$$

Iz 1. jednadžbe slijedi:

$$x = -\frac{4}{3}y + 7. \qquad \text{(a)}$$

Uvrštenje u 2. jednadžbu daje:

$$\left(-\frac{4}{3}y + 7\right)^2 + y^2 - 6\left(-\frac{4}{3}y + 7\right) + 4y - 7 = 0$$

ili: $\frac{16}{9}y^2 - \frac{56}{3}y + 49 + y^2 + 8y - 42 + 4y - 7 = 0 \,/\cdot 9$

$$16y^2 - 168y + 9y^2 + 72y + 36y = 0$$

ili: $25y^2 - 60y = 0.$

ili: $5y\,(5y - 12) = 0.$

Odatle: $y_1 = 0$

$$5y - 12 = 0$$

$$y_2 = \frac{12}{5}.$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$x_1 = 7; \qquad x_2 = \frac{19}{5}.$$

Dirališta: $T_1\ (7,0)$ i $T_2\ \left(\frac{19}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

Prema (34) dobivamo:

Tangenta I: $(x-3)\ (7-3) + (y+2)\ (0+2) = 20.$

Odatle: $4x - 12 + 2y + 4 = 20$

ili: $4x + 2y - 28 = 0\ /:2$

$2x + y - 14 = 0.$

Tangenta II: $(x-3)\left(\frac{19}{5} - 3\right) + (y+2)\left(\frac{12}{5} + 2\right) = 20.$

Odatle: $\frac{4}{5}x - \frac{12}{5} + \frac{22}{5}y + \frac{44}{5} = 20/\cdot 5$

$4x + 22y - 68 = 0\ /:2$

$2x + 11y - 34 = 0.$

4. POPIS FORMULA I UPUTE ZA RJEŠAVANJE ZADATAKA U VEZI S KRUŽNICOM

I. Zadana kružnica ima središte u ishodištu (0,0), pa njena jednadžba glasi:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

a) Zadano je diralište $T_1\ (x_1, y_1)$ tangente

1. Jednadžba tangente:

$$xx_1 + yy_1 = r^2$$

ili:

$$y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{r_2}{y_1}.$$

2. Jednadžba normale: $y = \frac{y_1}{x_1}x$ odn. $y = -\frac{1}{k}x$,

gdje je k koeficijent smjera tangente izračunate prema 1.

b) Diralište tangente nije zadano.

1. Jednadžba tangente: $y = kx + l.$

Nepoznanice k i l određuju se

1) iz uvjetne jednadžbe: $l^2 = r^2\ (1 + k^2)$ i

2) iz još jedne jednadžbe, koju treba napisati prema onome što je u zadatku zadano.

(Ako je npr. u zadatku zadano da tražena tangenta mora biti usporedna s pravcem $y = 3x - 5$, druga jednadžba bi glasila $k = 3$, a ako bi trebala da bude okomita na taj pravac, druga jednadžba bi bila $k = -\frac{1}{3}$).

2. Koordinate dirališta (x_1, y_1) tangente mogu se odrediti na dva načina:

1) Pomoću formula:

$$x_1 = -\frac{kr^2}{l}$$

$$y_1 = \frac{r^2}{l}$$

u koje se za k i l uvrste vrijednosti izračunate prema 1.

2) riješe se zajedno jednadžba zadane kružnice i jednadžba tangente izračunate prema 1. Kao kontrola tačnosti računa služi činjenica da pri određivanju x_1, odnosno y_1, izraz pod korijenom, tj diskriminanta D, mora biti nula. Druga koordinata dirališta dobiva se uvrštenjem vrijednosti dobivene za x_1, odnosno y_1 u jednadžbu tangente.

3. Jednadžba normale u diralištu (x_1, y_1):

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1),$$

gdje je k koeficijent smjera tangente, uzet iz jednadžbe tangente izračunate prema 1.

4. Jednadžba polare:

$$x_0 x + y_0 y = r^2,$$

gdje su x_0 i y_0 koordinate pola.

Riješi li se sustav od jednadžbe polare i jednadžbe kružnice, dobiju se koordinate dirališta tangenata na kružnicu iz pola P. Dalje se postupa kako je pokazano pod I A, pa se i na taj način mogu odrediti jednadžbe tangenata na kružnicu iz zadane tačke P izvan kružnice.

II. Zadana kružnica ima središte u tački $S(p, q)$, pa njena jednadžba glasi:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

A) Zadano je diralište $T_1(x_1, y_1)$ tangente

1. Jednadžba tangente:

$$(x - p)(x_1 - p) + (y - q)(y_1 - q) = r^2.$$

2. Jednadžba normale u diralištu (x_1, y_1):

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1),$$

gdje je k koeficijent smjera tangente, uzet iz jednadžbe tangente izračunate prema 1.

B) Diralište tangente nije zadano

1. Jednadžba tangente:

$$y = kx + l.$$

Nepoznanice k i l određuju se

1) iz uvjetne jednadžbe:

$$(-kp + q - l)^2 = r^2 (1 + k^2) \quad \text{i}$$

2) iz još jedne jednadžbe, koju treba napisati prema onome što je u zadatku zadano.

2. Koordinate dirališta (x_1, y_1) tangente određuju se tako da se zajedno riješe jednadžba zadane kružnice i jednadžba tangente izračunate prema 1. Kontrolu računa i dr. (vidi pod I B 2, 2).

3. Jednadžba normale u diralištu (x_1, y_1):

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1),$$

gdje je k koeficijent smjera tangente, uzet iz jednadžbe tangente izračunate prema 1.

4. Jednadžba polare:

$$(x_0 - p)\ (x - p) + (y_0 - q)\ (y - q) = r^2,$$

gdje su x_0 i y_0 koordinate pola.

Riješi li se sustav od jednadžbe polare i jednadžbe kružnice, dobiju se koordinate dirališta tangenata iz pola P. Dalje se postupa kako je pokazano pod II A, da se dobiju jednadžbe tangenata na kružnicu iz zadane tačke P izvan kružnice.

§ 9. ELIPSA

1. DEFINICIJA ELIPSE. KONSTRUKCIJA ŽARIŠTA I SAME ELIPSE

Elipsa je geometrijsko mjesto tačaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti ili zbroj radij-vektora r_1 i r_2 od dvije čvrste tačke — žarišta (fokusa) F_1 i F_2 stalan i jednak velikoj osi elipse $2a$.

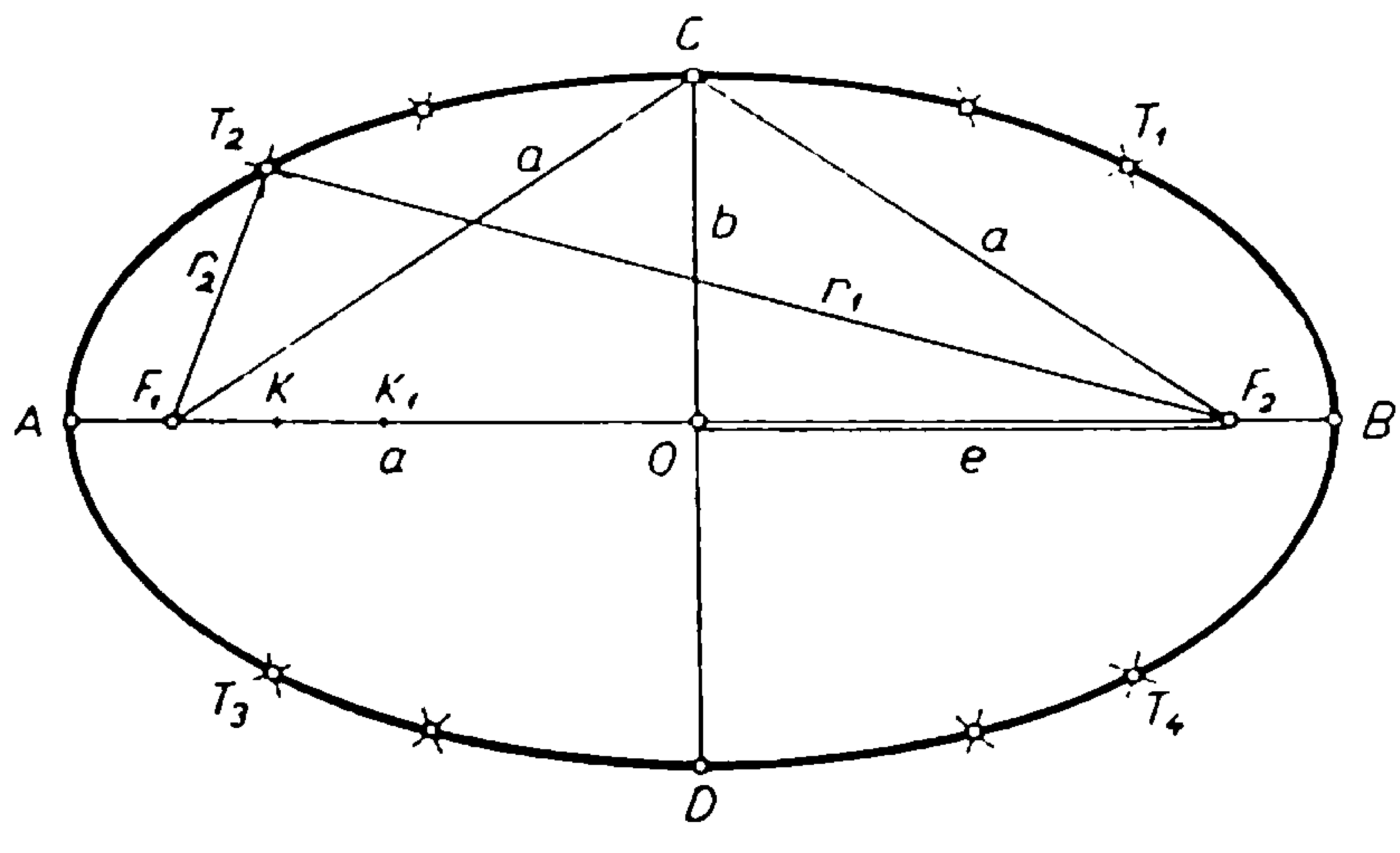
Za svaku tačku elipse vrijedi dakle jednadžba:

$$\underline{r_1 + r_2 = 2a} \tag{40}$$

(vidi sl. 98).

Iz definicije elipse slijedi:

1. Konstrukcija žarišta elipse F_1 i F_2 i
2. konstrukcija elipse same,
   ako su zadane obje osi elipse: velika $2a$ i mala $2b$.



Sl. 98

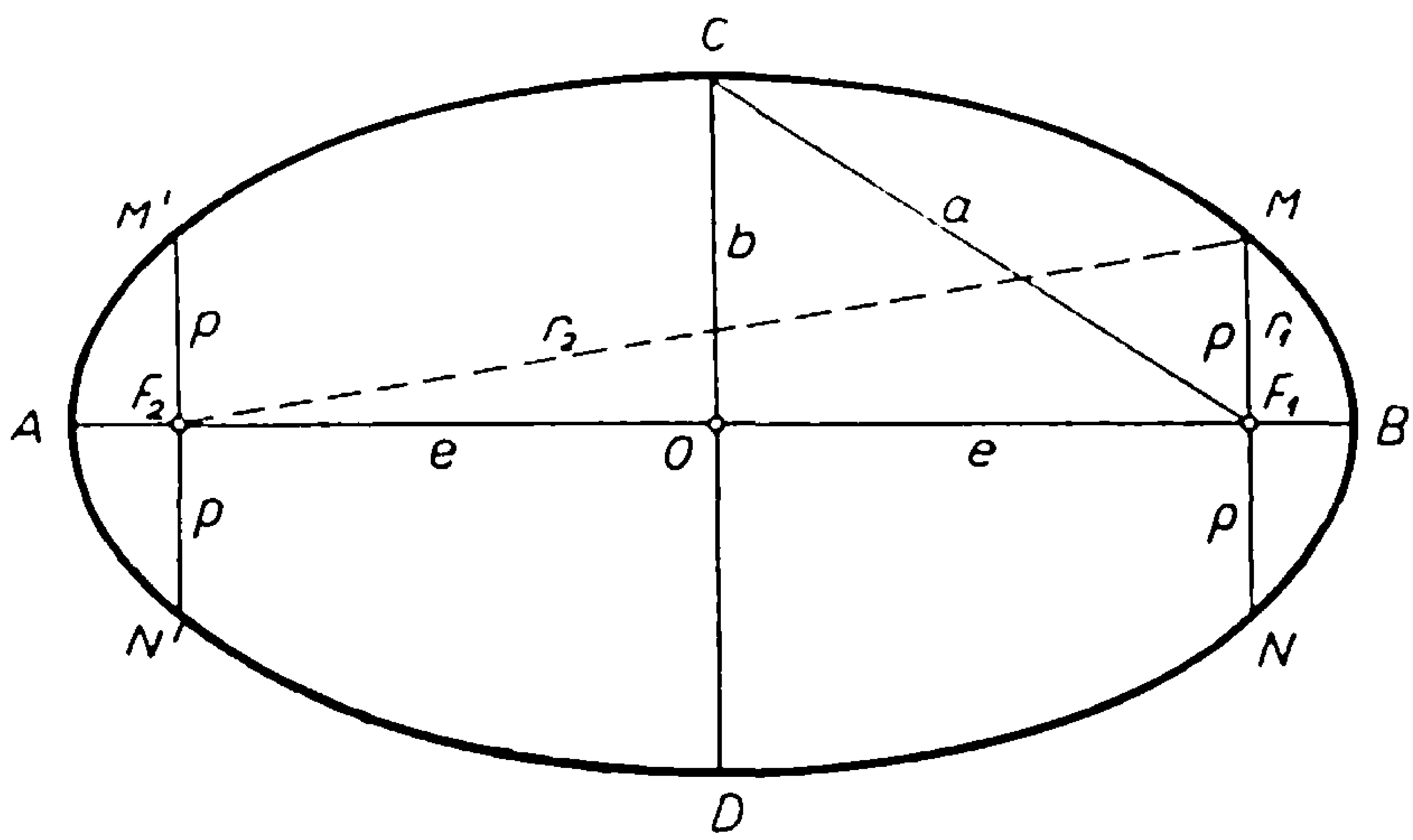
Uzmemo li u šestilo dužinu velike poluosi elipse a, pa opišemo iz gornjeg kraja C ili donjeg kraja D male osi elipse luk, presjeći će taj luk veliku os AB u traženim žarištima F_1 i F_2, jer zbroj udaljenosti tačaka C i D elipse od žarišta F_1 i F_2 mora biti $2a$, kao i za svaku drugu tačku elipse.

Imajući oba žarišta elipse F_1 i F_2, lako možemo konstruirati koliko god hoćemo tačaka elipse. Podijelimo li veliku os elipse $AB = 2a$ u dva odreska AK i KB po volji (vidi sl. 98) i opišemo li iz svakog žarišta lukove polumjera AK i KB, sjeći će se ti lukovi u tačkama T_1, T_2, T_3 i T_4, koje pripadaju elipsi, jer je za svaku od tih tačaka

$$r_1 + r_2 = AK + KB = 2a.$$

Na isti način konstruiraju se daljnje tačke elipse.

2. LINEARNI I NUMERIČKI EKSCENTRICITET ELIPSE. PARAMETAR ELIPSE



Sl. 99

Udaljenost žarišta F_1 ili F_2 od središta elipse O zove se linearni ekscentricitet elipse i označuje se slovom e (vidi sl. 99).

Iz pravokutnog trokuta COF_1 slijedi po Pitagorinu poučku:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}. \tag{41}$$

Kvocijent $\dfrac{e}{a} = \dfrac{\text{linearni ekscentricitet}}{\text{velika poluos}}$ zove se numerički ekscentricitet elipse i označuje se slovom ε.

Prema tome s obzirom na (41) možemo pisati:

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \tag{42}$$

pri čemu je uvijek:

$$\varepsilon < 1 \text{ za elipsu,} \tag{42a}$$

jer je u izrazu $\varepsilon = \dfrac{e}{a}$ brojnik e uvijek manji od nazivnika a (e je kateta, a je hipotenuza u pravokutnom trokutu COF_1).

Ako su obje poluosi elipse jednake, tj. $a = b$, elipsa prelazi u kružnicu polumjera $r = a = b$, pa je prema (41) linearni ekscentricitet $e = 0$, a prema (42) numerički ekscentricitet

$$\varepsilon = 0 \quad \text{za kružnicu.} \tag{43}$$

Tetiva MN ili M' N' povučena kroz žarište elipse F_1 ili F_2 okomito na veliku os AB zove se parametar elipse, a njegova se dužina označuje sa $2p$.

Iz pravokutnog trokuta $F_2\ F_1\ M$ (vidi sl. 99) slijedi po Pitagorinu poučku, ako se uzme u obzir da je:

$$F_1 M + F_2 M = r_1 + r_2 = p + r_2 = 2a, \text{ pa je } r_2 = F_2 M = 2a - p:$$
$$p^2 = (2a - p)^2 - (2e)^2.$$

Uvrstimo li ovamo formulu (41), te uredivši tako dobivenu jednadžbu, riješimo je po p, dobit ćemo izraz za poluparametar elipse:

$$p = \frac{b^2}{a}. \tag{44}$$

3. JEDNADŽBE ELIPSE

a) Središnja jednadžba elipse

Uzmemo li takav koordinatni sustav da se os X podudara sa velikom osi elipse $2a$, a os Y sa malom osi $2b$ (sl. 100), dobit ćemo prema (40) i (8) jednadžbu koja vrijedi za svaku tačku elipse $T\ (x, y)$:

$$\sqrt{(x + e)^2 + y^2} + \sqrt{(e - x)^2 + y^2} = 2a.$$

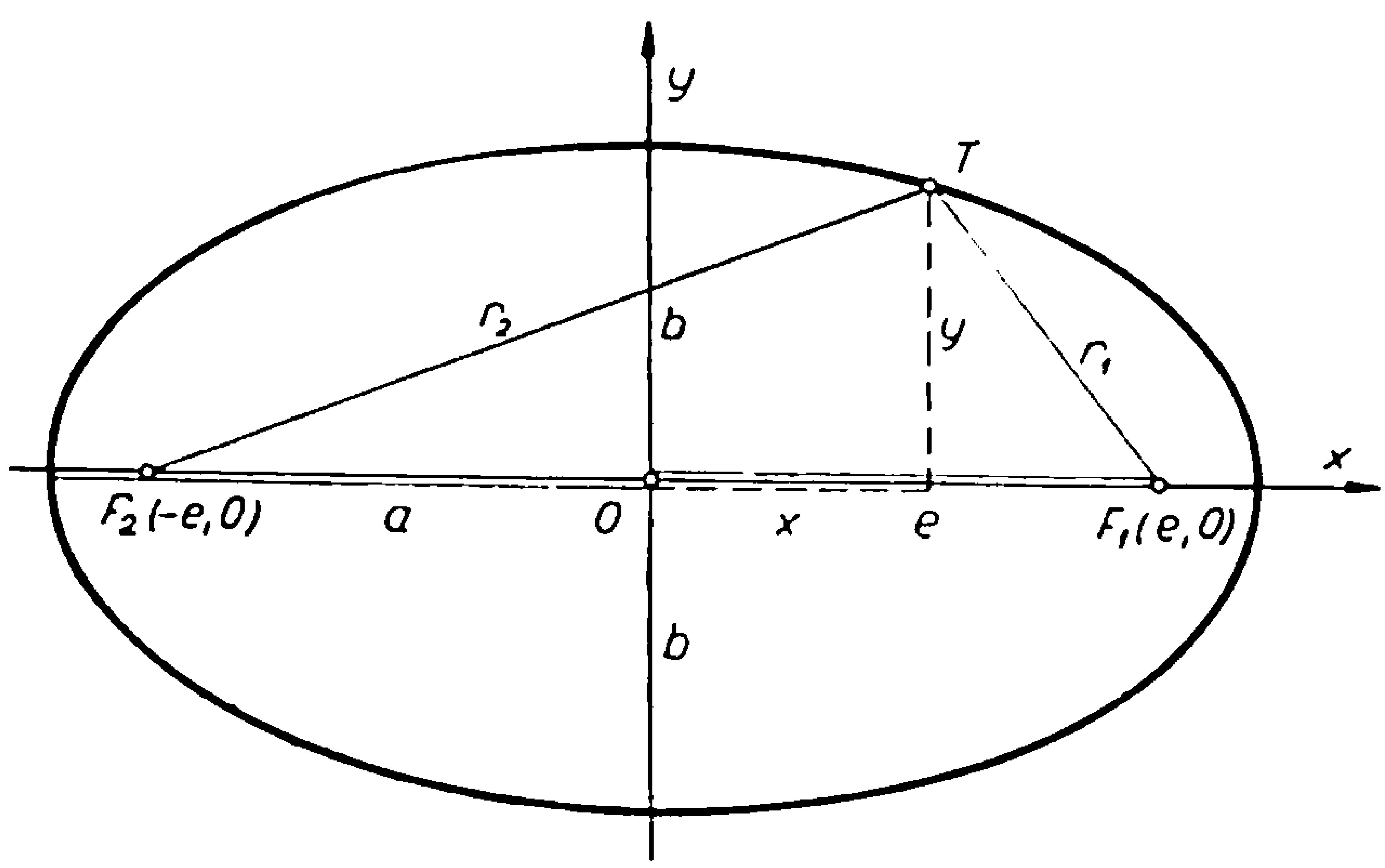
Ako drugi član lijeve strane prenesemo na desnu stranu, kvadriramo tako dobiveni izraz i uredimo, ponovno kvadriramo i uvrstimo formulu (41), dobit ćemo:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2. \tag{45}$$

To je središnja ili osna jednadžba elipse, koju možemo također pisati i u drugim oblicima:

1) Podijelimo li jednadžbu (45) s $a^2 b^2$, dobijemo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{45a}$$



Sl. 100

2) Riješimo li jednadžbu (45) po y, dobit ćemo središnju jednadžbu elipse u eksplicitnom obliku:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{45b}$$

Primjer:

Treba izračunati osi, linearni i numerički ekscentricitet i parametar elipse $4x^2 + 9y^2 = 25$!

$$4x^2 + 9y^2 = 25 \ / : 25$$

$$\frac{4x^2}{25} + \frac{9y^2}{25} = 1$$

ili:

$$\frac{x^2}{\frac{25}{4}} + \frac{y^2}{\frac{25}{9}} = 1.$$

Iz uspoređenja dobivenog izraza s jednadžbom (45a) slijedi:

$$a^2 = \frac{25}{4}; \qquad \underline{a = \frac{5}{2} = 2{,}5 \qquad 2a = 5.}$$

$$b^2 = \frac{25}{9}; \qquad \underline{b = \frac{5}{3} = 1{,}67, \qquad 2b = \frac{10}{3} = 3{,}33.}$$

Prema (41):

$$e = \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{125}}{6} = \frac{11{,}18}{6} = \underline{1{,}86.}$$

Prema (42):

$$\varepsilon = \frac{1{,}86}{2{,}5} = \underline{0{,}744.} \qquad (< 1).$$

Prema (44):

$$p = \frac{25}{9 \cdot 2{,}5} = 1{,}11.$$

$$\underline{2p = 2{,}22.}$$

Poseban slučaj:

Ako je $b > a$, tj. ako je velika poluos elipse b, a mala a, žarišta elipse leže na osi Y, pa je $e = \sqrt{b^2 - a^2}$, $\varepsilon = \frac{e}{b}$, $p = \frac{a^2}{b}$.

Primjer.

$$9x^2 + 4y^2 = 36 \ / : 36$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\underline{a = 2;} \qquad \underline{b = 3.}$$

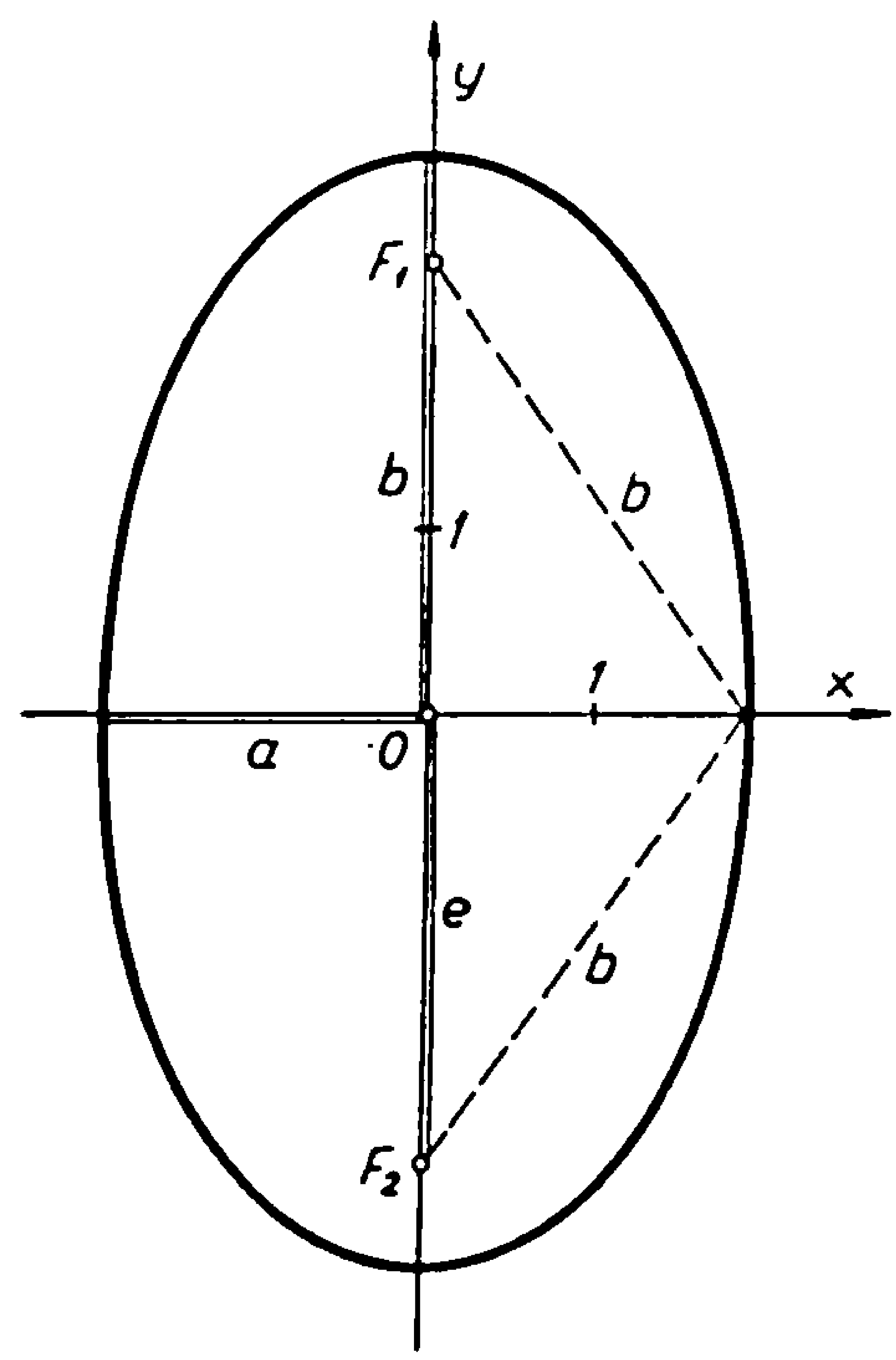
$$e = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5} = \underline{2{,}24}$$

$$\varepsilon = \frac{2{,}24}{3} = \underline{0{,}75}$$

$$p = \frac{4}{3} = \underline{1{,}33}$$

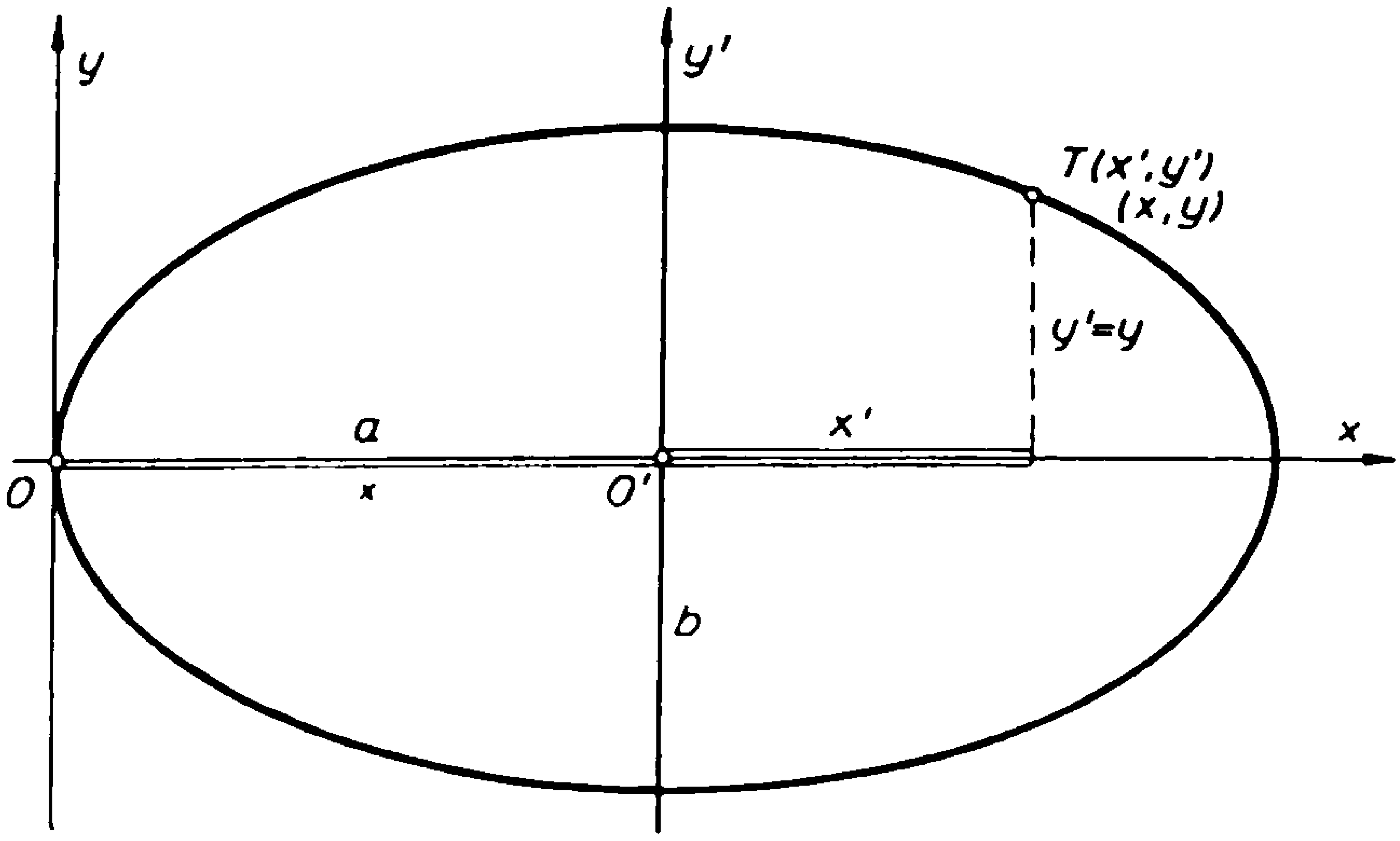
$$\underline{2p = 2{,}67}$$

(Vidi sl. 101).



Sl. 101

b) Vršna jednadžba elipse



Sl. 102

Izvršimo li translaciju koordinatnog sustava $X\,O'\,Y'$, prema kojem elipsa ima jednadžbu oblika (45):

$$b^2\,x'^2 + a^2\,y'^2 = a^2\,b^2$$

u položaj $X\,O\,Y$ tako, da ishodište koordinatnog sustava dođe u lijevi vrh elipse (vidi sl. 102), bit će $x' = x - a$, a $y' = y$, te jednadžba elipse prima oblik:

$$b^2\,(x - a)^2 + a^2\,y^2 = a^2\,b^2$$

ili:

$$b^2\,x^2 - 2\,b^2\,a\,x + a^2\,b^2 + a^2\,y^2 = a^2\,b^2 \,|: a^2$$

ili:

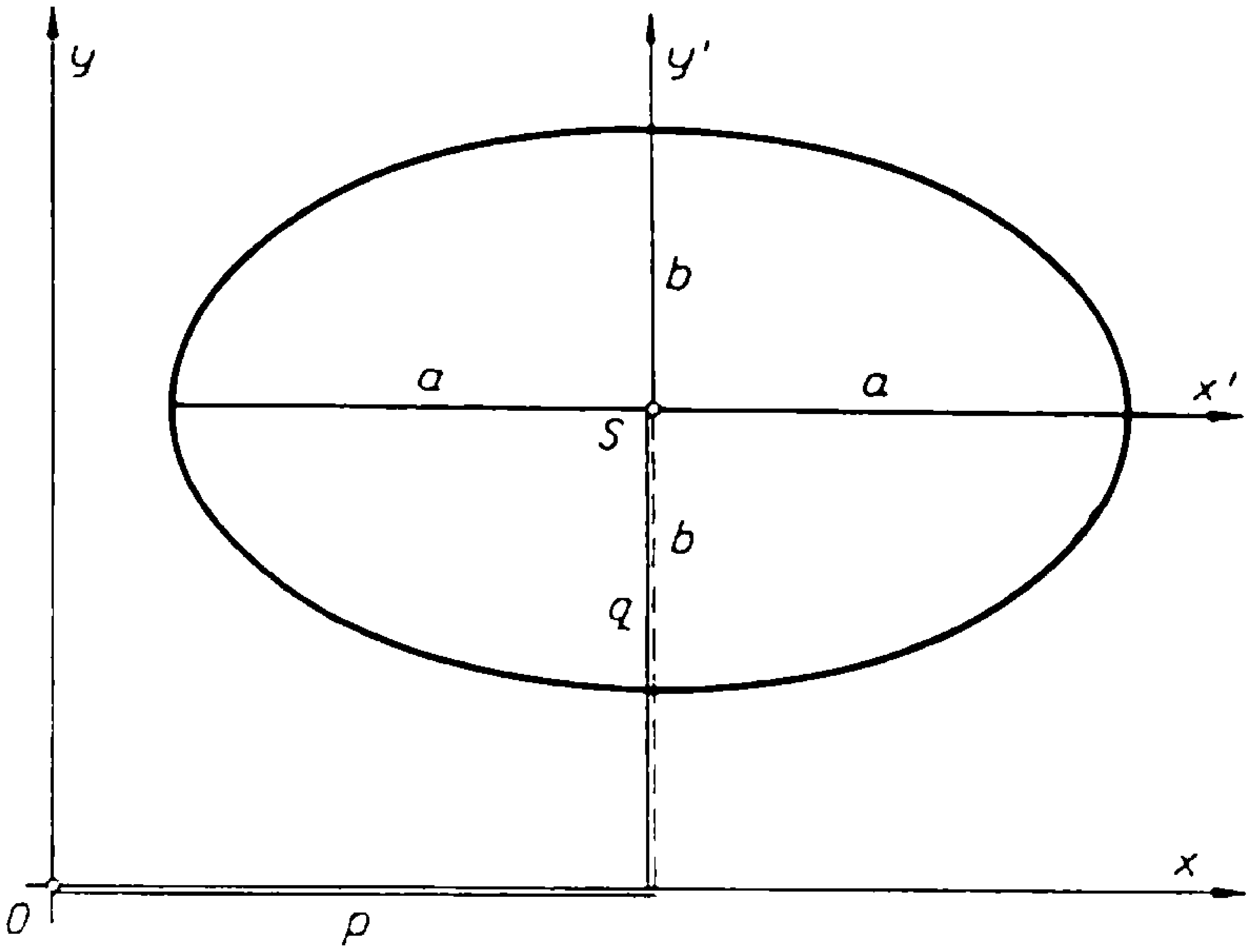
$$y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}\,x^2,$$

a kako je prema (44) poluparametar $p = \dfrac{b^2}{a}$, dobivamo:

$$y^2 = 2\,p\,x - \frac{p}{a}\,x^2. \tag{46}$$

T o j e v r š n a j e d n a d ž b a e l i p s e.

c) Jednadžba elipse kojoj je središte u tački S (p, q), a osi su usporedne s koordinatnim osima



Sl. 103

Izvršimo li translaciju elipse duž osi X za dužinu p, a isto tako i duž osi Y za dužinu q, glasit će jednadžba elipse s obzirom na koordinatni sustav $X' S Y'$ $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, a s obzirom na koordinatni sustav $X O Y$ [vidi formule (5a) i sl. 103]:

$$\frac{(x - p)^2}{a^2} + \frac{(y - q)^2}{b^2} = 1 \tag{47}$$

ili:

$$b^2 (x - p)^2 + a^2 (y - q)^2 = a^2 b^2. \tag{47a}$$

Tu su a i b poluosi elipse, a p i q koordinate njena središta S.

Izvedemo li operacije naznačene u formuli (47a), dobit ćemo:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2\,b^2p\,x - 2\,a^2q\,y + (b^2p^2 + a^2q^2 - a^2b^2) = 0,$$

a ako označimo:

$$b^2 = A$$

$$a^2 = C$$

$$-b^2p = D$$

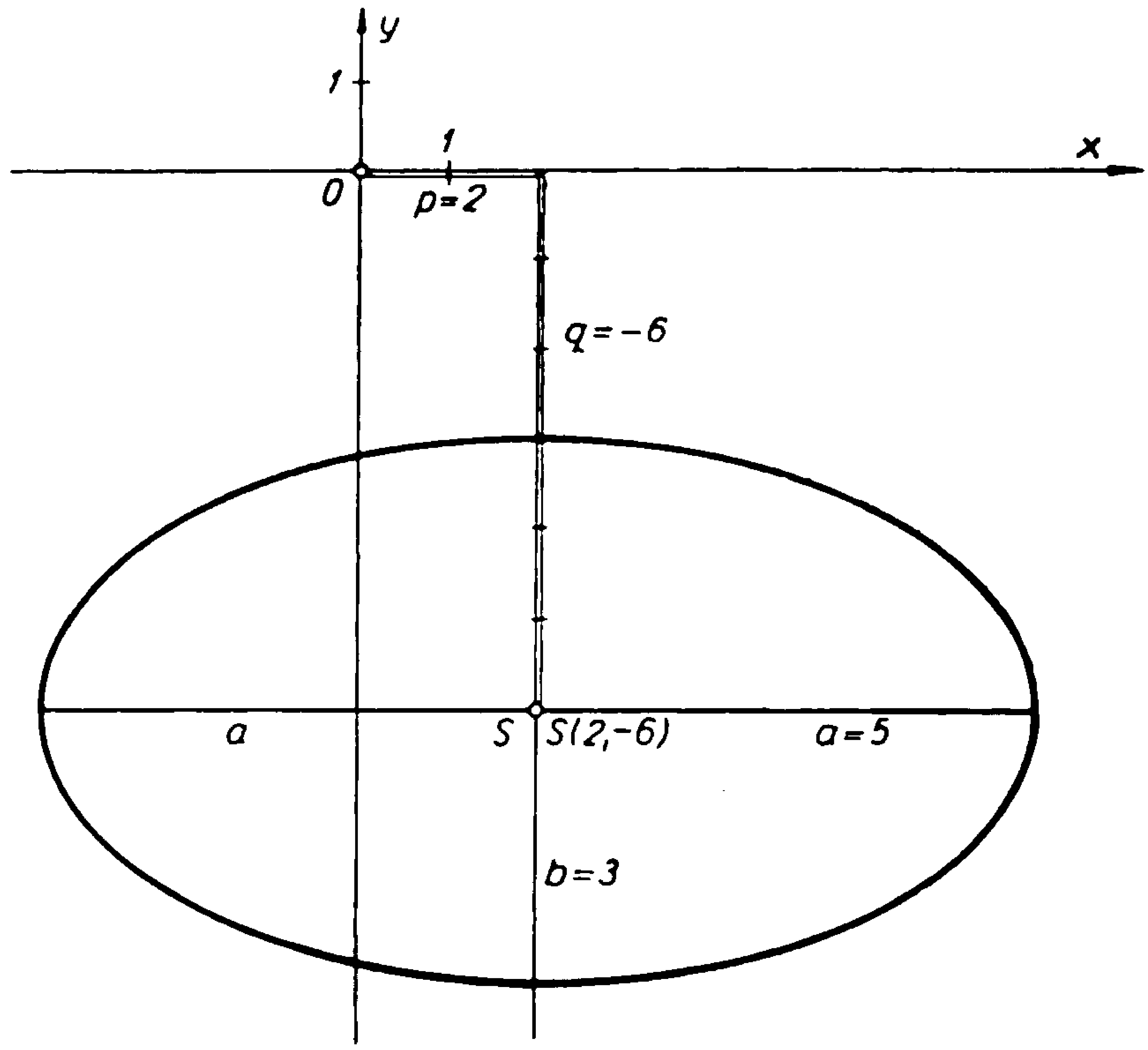
$$-a^2q = E$$

$$b^2p^2 + a^2q^2 - a^2b^2 = F$$

primit će jednadžba elipse prikazane na sl. 103 oblik:

$$A\,x^2 + C\,y^2 + 2\,D\,x + 2\,E\,y + F = 0.$$

Ima li, dakle, jednadžba drugog stepena u x i y oblik (48), ona predočuje gore prikazanu elipsu, ako su koeficijenti A i C istog predznaka (Vidi također § 12, 2).



Sl. 104

Primjer:

Treba narisati elipsu:

$$9x^2 + 25y^2 - 36x + 300y + 711 = 0.$$

Zadanu jednadžbu elipse možemo napisati i ovako:

$$9(x^2 - 4x) + 25(y^2 + 12y) = -711.$$

Nadopunjavanje na potpune kvadrate izraza u zagradama daje:

$$9(x^2 - 4x + 4) + 25(y^2 + 12y + 36) = -711 + 9 \cdot 4 + 25 \cdot 36$$

ili: $$9(x - 2)^2 + 25(y + 6)^2 = 36 + 900 - 771$$

ili: $$9(x - 2)^2 + 25(y + 6)^2 = 225 \ / : 225$$

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+6)^2}{9} = 1.$$

Iz uspoređenja s jednadžbom (47) slijedi:

$$a = 5; \quad b = 3; \quad p = 2; \quad q = -6.$$

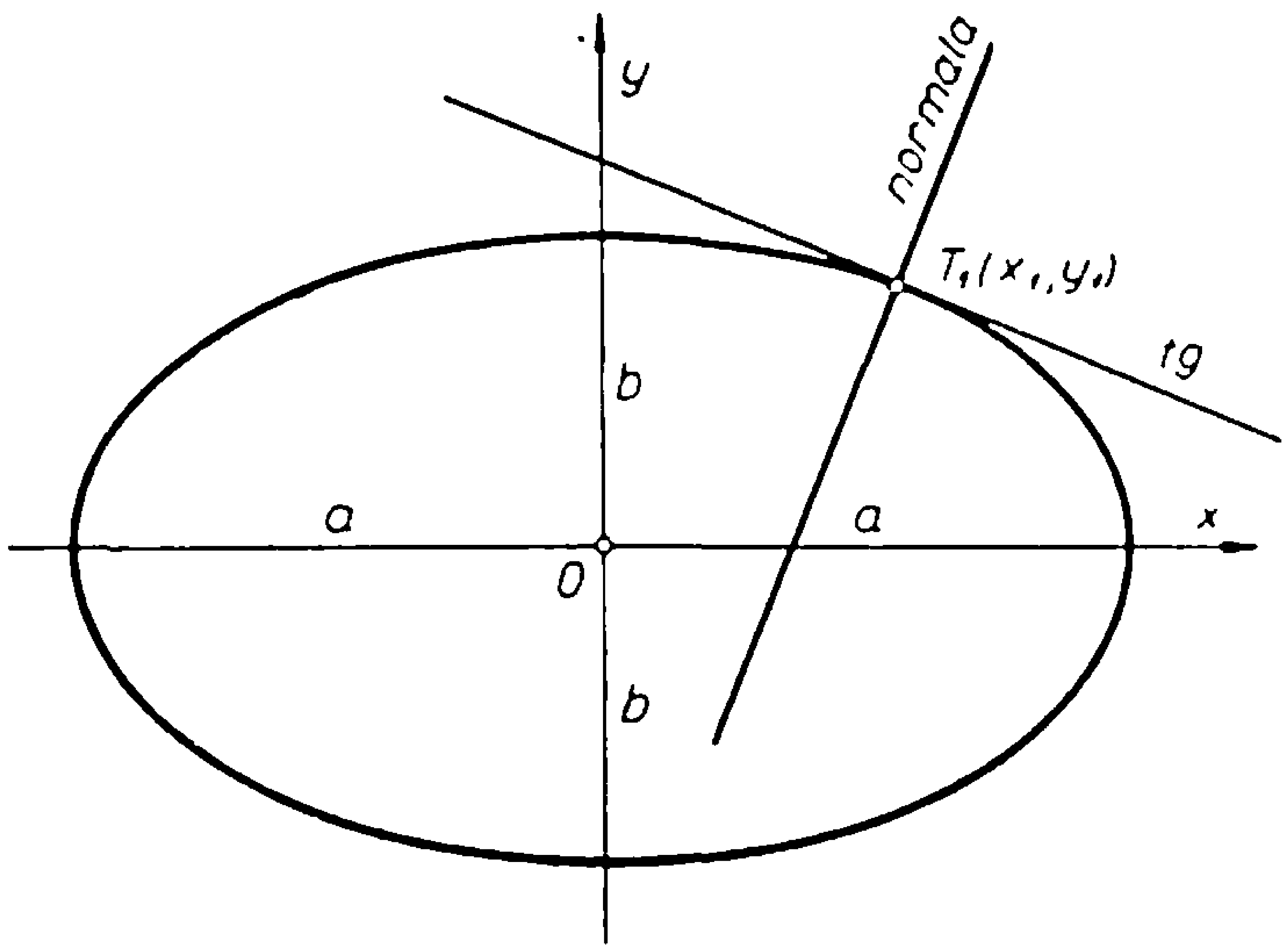
Sl. 104 prikazuje zadanu elipsu.

4. PRAVAC I ELIPSA

a) Uvjetna jednadžba

Kao i kod kružnice, pravac $y = kx + l$ može sjeći elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ u dvjema tačkama ili je dirati u jednoj tački, tj. biti tangentom elipse, ili nemati s elipsom zajedničkih tačaka. Prema tome će pravac $y = kx + l$ biti tangenta, ako rješenja sustava

$$\left.\begin{aligned} b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\ y &= kx + l \end{aligned}\right| \quad \text{i to}$$



Sl. 105

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{1}{k^2a^2 + b^2}\left(kla^2 \pm ab\sqrt{k^2a^2 + b^2 - l^2}\right) \\ y &= \frac{1}{k^2a^2 + b^2}\left(b^2l \mp kab\sqrt{k^2a^2 + b^2 - l^2}\right) \end{aligned}\right| \tag{a}$$

imaju diskriminantu koja je jednaka nuli. Stoga je:

$$D = k^2a^2 + b^2 - l^2 = 0 \tag{b}$$

ili:

$$l^2 = k^2a^2 + b^2 \tag{49}$$

u v j e t n a j e d n a d ž b a, d a j e p r a v a c $y = kx + l$ t a n g e n t a e l i p s e $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

To znači: pravac $y = kx + l$ tangira elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, ako koeficijent smjera k pravca i odsječak l na osi y zadovoljavaju jednadžbu $l^2 = k^2a^2 + b^2$.

U tom slučaju daju jednadžbe (a) koordinate dirališta T_1 $(x_1\, y_1)$, koje s obzirom na (b) i (49) primaju oblik:

$$x_1 = -\frac{ka^2}{l} \tag{49a}$$

$$y_1 = \frac{b^2}{l}.$$

Kao u slučaju kružnice pomoću uvjetne jednadžbe (49) određuje se jednadžba tangente na elipsu u tim slučajevima, kad diralište tangente nije zadano, pri čemu se koordinate dirališta određuju ili iz (49a) ili iz sustava jednadžbi, što ga čine jednadžba tražene tangente i jednadžba zadane elipse.

b) Jednadžbe tangente i normale povučenih u zadanoj tački elipse

Iz (49a) slijedi:

$$k = -\frac{l x_1}{a^2} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

i:

$$l = \frac{b^2}{y_1},$$

pri čemu se drugi izraz za k dobije iz prvog tako, da se u nj uvrsti

$$l = \frac{b^2}{y_1}.$$

Uvrštenje tih izraza u jednadžbu $y = kx + l$ daje jednadžbu tangente u zadanoj tački T_1 (x_1, y_1) elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$:

$$y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x + \frac{b^2}{y_1}$$

ili:

$$b^2 x x_1 + a^2 y y_1 = a^2 b^2, \tag{50}$$

pri čemu je:

$$k = -\frac{b^2 x_1}{a^2 x_1} \tag{50a}$$

koeficijent smjera te tangente.

Normala elipse je okomita na tangenti u diralištu T_1 (x_1, y_1). Dakle prema (22) i (50a) njezin će koeficijent smjera biti:

$$k = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1},$$

a jednadžba normale u tački T_1 (x_1, y_1) elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ prema (19) će glasiti:

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1). \tag{51}$$

c) Konstrukcija tangente u zadanoj tački elipse

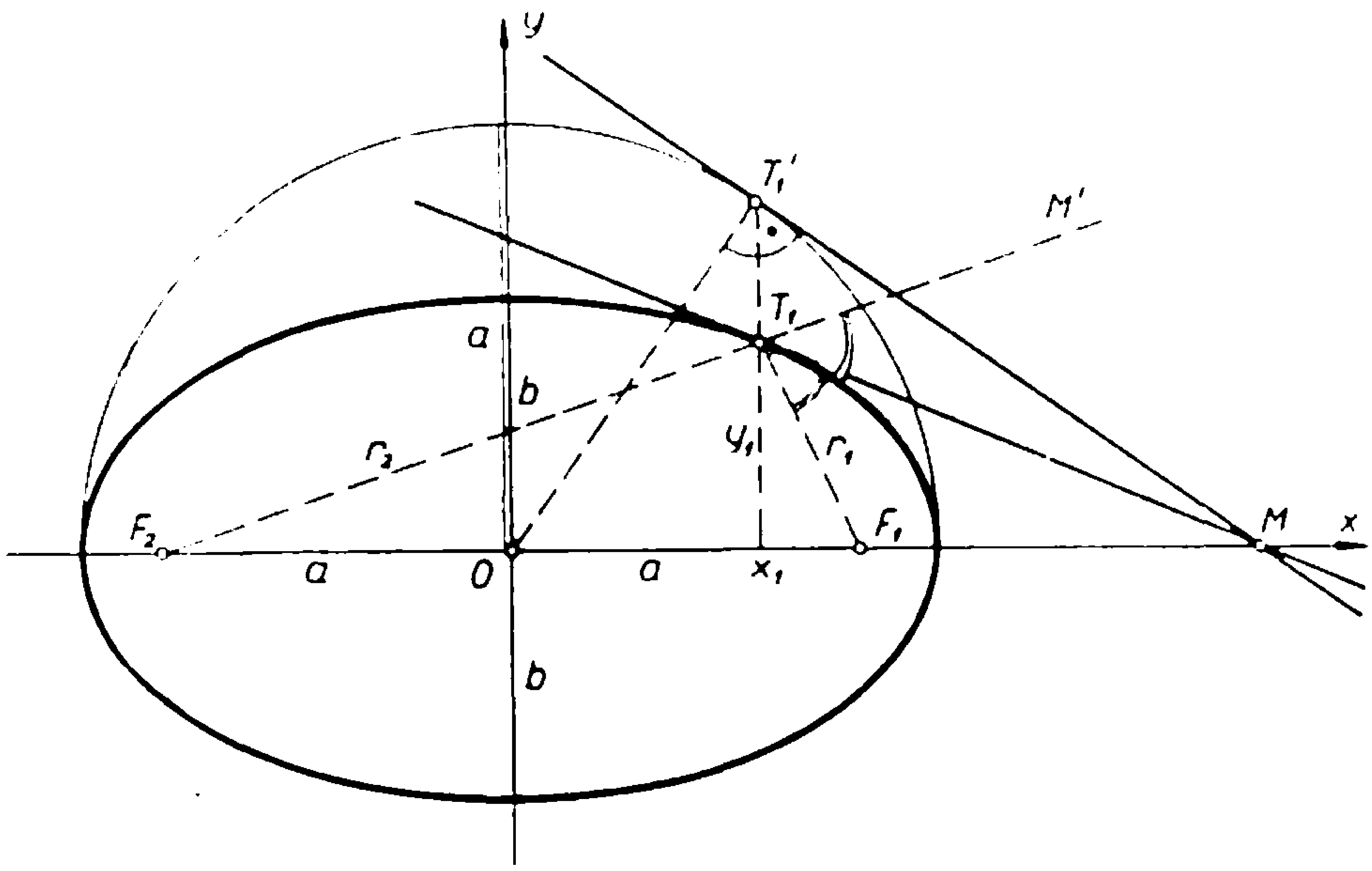
Tangentu u zadanoj tački T_1 elipse možemo konstruirati na dva načina:

1. način. Uvrstimo li u (50) $y = 0$, dobit ćemo $x = \frac{a^2}{x_1}$, a to je odsječak na osi X, koji čini tangenta povučena u tački T_1 (x_1, y_1) elipse.

U taj izraz za odsječak ne ulazi niti ordinata y_1 dirališta T_1, niti mala poluos b elipse, pa je taj odsječak isti za sva dirališta iste apscise x_1 i to za sve elipse zadane velike poluosi a, dakle i za kružnicu polumjera a, jer je kružnica poseban slučaj elipse, kojoj su obje poluosi jednake. Konstruiramo li u tački T'_1 kružnice polumjera a tangentu (vidi sl. 106), sjeći će ta tangenta os X u tački M. Spojnica tačke M i zadanog dirališta T_1 jest tražena tangenta elipse.

2. način. Konstrukcija tangente osniva se na njenom svojstvu da raspolavlja vanjski kut radij-vektora povučenih u diralište, tj.

$$\sphericalangle F_1 T_1 M = \sphericalangle M T_1 M' \text{ (vidi sl. 106).}$$



Sl. 106

Primjer:

Treba napisati jednadžbe tangente i normale u tački $T_1\left(\frac{24}{5}, -3\right)$ elipse $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$.

$$a^2 = 36; \qquad b^2 = 25.$$

Prema (50);

$$25 \cdot \frac{24}{5} \cdot x - 36 \cdot 3 \cdot y = 36 \cdot 25 / : 12$$

$$\underline{10x - 9y - 75 = 0,}$$

a u eksplicitnom obliku: $\underline{y = \frac{10}{9}x - \frac{75}{9}}$ — tražene jednadžbe tangente.

ili: $\underline{y = 1{,}11x - 8{,}33.}$

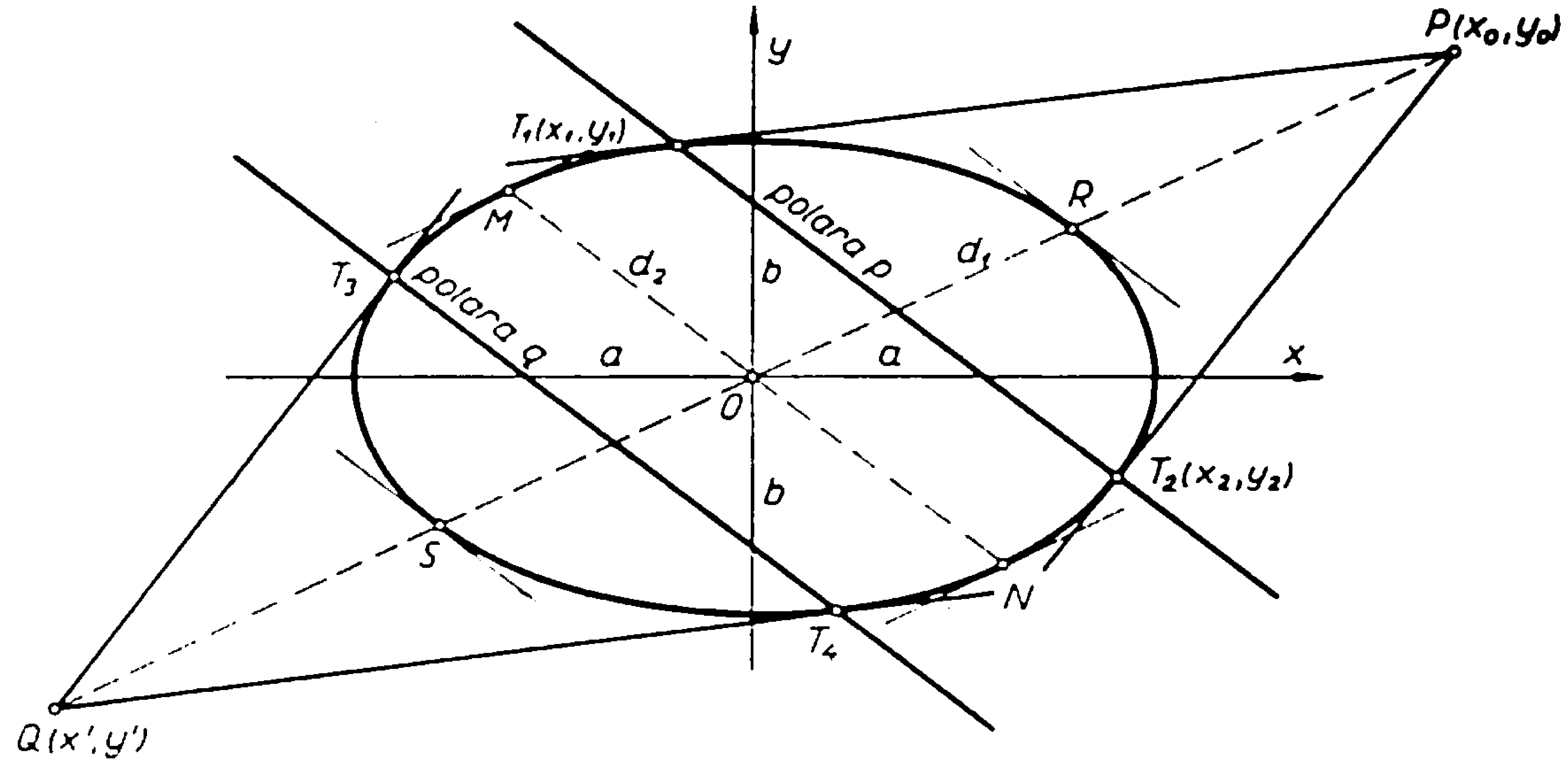
Prema (51): $\quad y + 3 = -\frac{9}{10}\left(x - \frac{24}{5}\right),$

a odatle: $\underline{y = -0{,}9x + 1{,}32}$ jednadžba normale ili u općem obliku:

$$\underline{9x + 10y - 13{,}2 = 0}.$$

d) Jednadžbe tangenata povučenih iz zadane tačke izvan elipse

Jednadžbe tangenata povučenih iz tačke $P\ (x_0, y_0)$ na elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ dobiju se slično kao kod kružnice.



Sl. 107

1. način. Koeficijenti smjera k_1 i k_2 i odsječci l_1 i l_2 na osi Y traženih tangenata $y = k_1x + l_1$ i $y = k_2x + l_2$ su rješenja sustava jednadžbi:

$$y_0 = kx_0 + l$$

$$l^2 = k^2a^2 + b^2, \tag{52}$$

u kome je druga jednadžba uvjetna (49), a x_0 i y_0 su koordinate pola P (vidi sl. 107).

2. način. Napiše se jednadžba polare, koja za elipsu glasi:

$$b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2, \tag{53}$$

pa se određuju koordinate dirališta $T_1\ (x_1, y_1)$ i $T_2\ (x_2, y_2)$ iz sustava što ga čine jednadžbe polare i elipse:

$$\left.\begin{array}{l} b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2, \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \end{array}\right| \tag{54}$$

Uvrštenje tako određenih koordinata dirališta u jednadžbu tangente (50) daje tražene jednadžbe tangenata.

Primjer:

Treba napisati jednadžbe tangenata povučenih na elipsu $9x^2 + 25y^2 = 225$ iz tačke $P\ (3; 7{,}4)$ i odrediti koordinate dirališta tih tangenata (vidi sl. 108).

1. način. Kako je $225 = 25 \cdot 9 = a^2b^2$, slijedi $a^2 = 25$; $b^2 = 9$.

Prema (52):

$$7{,}4 = 3k + l,$$

$$l^2 = 25k^2 + 9.$$

Iz prve jednadžbe slijedi:

$$l = -3k + 7{,}4. \qquad \text{(a)}$$

Uvrštenje u drugu jednadžbu daje:

$$9k^2 - 44{,}4k + 54{,}76 = 9 + 25k^2,$$

ili:
$$16k^2 + 44{,}4k - 45{,}76 = 0,$$

ili:
$$4k^2 + 11{,}1k - 11{,}44 = 0.$$

Odatle je:

$$k_{1,2} = \frac{-11{,}1 \pm \sqrt{123{,}21 + 183{,}04}}{8}$$

ili:
$$k_{1,2} = \frac{-11{,}1 \pm 17{,}5}{8}$$

Dakle:

$$k_1 = 0{,}8; \qquad k_2 = -3{,}575.$$

Prema (a): $l_1 = 5$: $\quad l_2 = 18{,}125.$

Uvrštenje tih vrijednosti u $y = kx + l$ daje:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{y = 0{,}8x + 5} \\ \underline{y = -3{,}575x + 18{,}125} \end{array}\right|$$ tražene jednadžbe tangenata.

Da bismo odredili koordinate dirališta $T_1 (x_1, y_1)$ i $T_2 (x_2, y_2)$ tangenata, primjenjujemo formule (49a). U tu svrhu uvrstimo u te formule:

za tangentu: $y = 0{,}8x + 5$:

$k = 0{,}8$; $l = 5$;

$a^2 = 25$, $b^2 = 9$;

za tangentu: $y = -3{,}575x + 18{,}125$:

$k = -3{,}575$; $l = 18{,}125$;

$a^2 = 25$, $b^2 = 9$.

Dobivamo:

za prvu tangentu: $\underline{x_1 = -4}$

$$\underline{y_1 = \frac{9}{5};}$$

za drugu tangentu: $$\underline{x_2 = \frac{143}{29}}$$

$$\underline{y_2 = \frac{72}{145}.}$$

Dirališta tangenata: $\underline{T_1\left(-4, \frac{9}{5}\right); \quad T_2\left(\frac{143}{29}, \frac{72}{145}\right)}$.

Do istih rezultata dolazimo rješavajući zajedno jednadžbu zadane elipse i jednadžbe izračunatih tangenata.

(Vidi sl. 108, na kojoj je taj primjer riješen grafički.)

2. način:

Prema (54):
$$\left.\begin{aligned} 27x + 185y &= 225 \\ 9x^2 + 25y^2 &= 225. \end{aligned}\right|$$

Iz 1. jednadžbe imamo:

$$x = \frac{1}{27}(-185y + 225) = \frac{5}{27}(-37y + 45). \qquad \text{(a)}$$

Uvrštenje u drugu jednadžbu daje:

$$\frac{25}{81}(-37y + 45)^2 + 25y^2 = 225.$$

Odatle:

$$1369y^2 - 3330y + 2025 + 81y^2 - 1296 = 0$$

ili:
$$725y^2 - 1665y + 648 = 0.$$

Odatle:

$$y_{1,2} = \frac{1665 \pm \sqrt{893025}}{1450} = \frac{1665 \pm 945}{1450}$$

$$y_1 = \frac{9}{5}; \qquad y_2 = \frac{72}{145}.$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$x_1 = -4; \qquad x_2 = \frac{143}{29}.$$

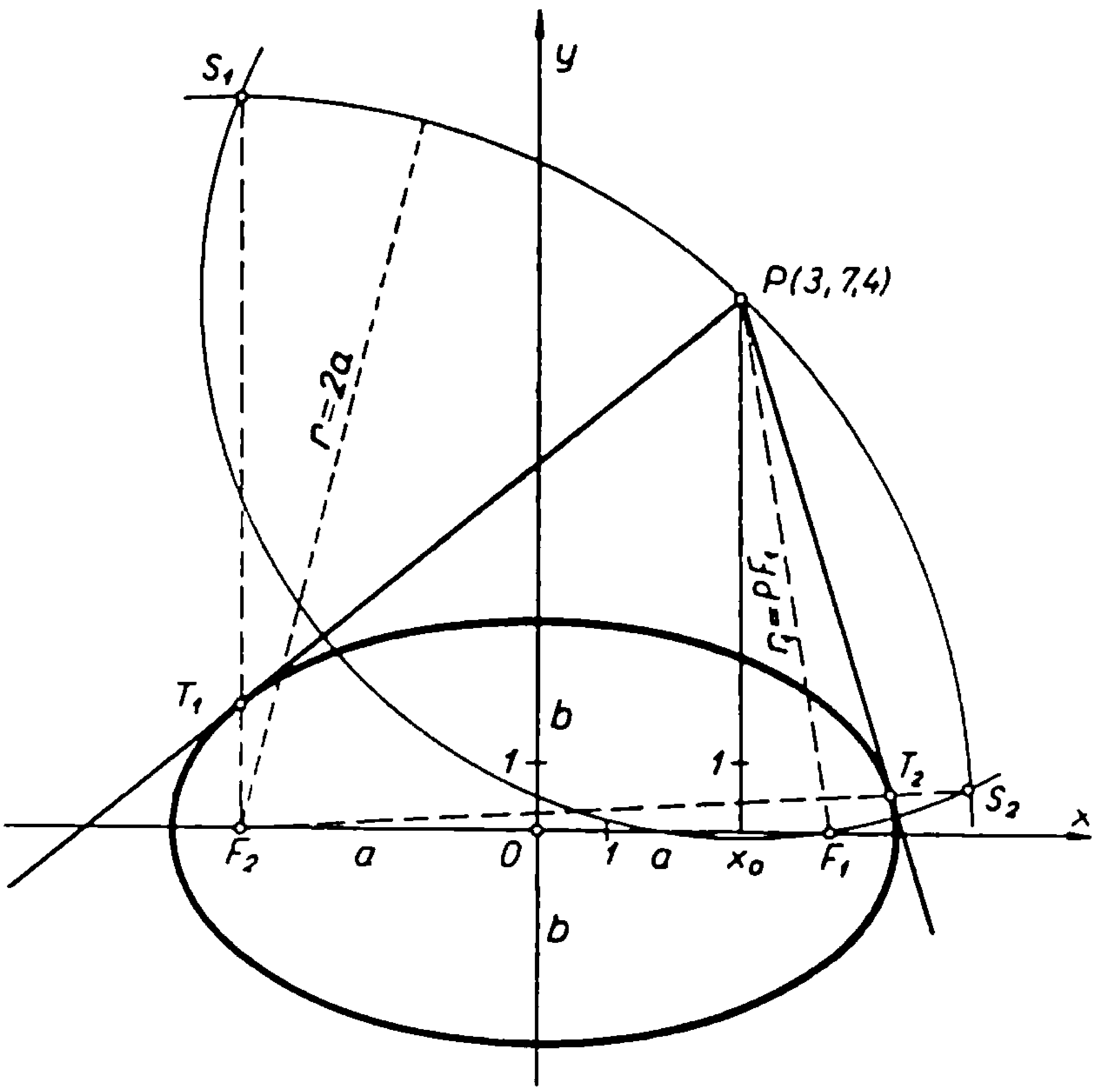
Dirališta su dakle: $\underline{T_1\left(-4, \frac{9}{5}\right)}$; $\quad \underline{T_2\left(\frac{143}{29}, \frac{72}{145}\right)}$.

Uvrštenje koordinata dirališta u jednadžbu (50) daje:

$$\left.\begin{aligned} &\underline{4x - 5y + 25 = 0} \\ &\underline{143x + 40y - 725 = 0} \end{aligned}\right| \quad \text{tražene jednadžbe tangenata.}$$

e) Konstrukcija tangenata povučenih iz zadane tačke izvan elipse

Slika 108 na kojoj je isti primjer riješen grafički, prikazuje kako se konstruiraju tangente povučene na elipsu iz zadane tačke (3, 7,4).



Sl. 108

Lukovi kružnica povučenih iz tačke P polumjera $r = PF_1$ i iz žarišta F_2 polumjera $r = 2a$ sijeku se u suprotištima S_1 i S_2. Spojnice žarišta F_2 sa suprotištima sijeku elipsu u traženim diralištima T_1 i T_2.

5. SVOJSTVA POLARE. KONJUGIRANI PROMJERI ELIPSE. KONSTRUKCIJA ELIPSE IZ ZADANOG PARA KONJUGIRANIH PROMJERA

Pravac PO, koji spaja pol P (x_0, y_0) sa središtem elipse O (0, 0) (vidi sl. 107) ima prema (20) jednadžbu:

$$y = \frac{y_0}{x_0} x \tag{55}$$

Uzmemo li na tom pravcu PO neku tačku po volji Q (x', y'), glasit će za taj pol Q jednadžba polare q prema (53).

$$b^2 x' x + a^2 y' y = a^2 b^2$$

ili u eksplicitnom obliku:

$$y = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} x + \frac{b^2}{y'}. \tag{b}$$

a kako je tačka Q (x', y') na pravcu PO, bit će prema (55)

$$y' = \frac{y_0}{x_0} x'$$

ili:
$$\frac{y'}{x'} = \frac{y_0}{x_0}.$$

Uvrštenje tog izraza u (b) daje:

$$y = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x + \frac{b^2}{y'}$$

pa je koeficijent smjera polare za pol Q $k = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$.

Kako se vidi iz (53), isti koeficijent smjera k ima polara za pol $P (x_0, y_0)$, tj. obje polare p i q su usporedne.

Iz toga slijedi da će polare svih tačaka na pravcu PO biti usporedni pravci.

Od svih tih polara prolazi jedna i to $MN = d_2$ središtem O elipse. Promjeri $RS = d_1$ i $MN = d_2$ zovu se konjugirani promjeri ili konjugirani dijametri elipse. Polare za polove R i S bit će tangente elipse u tim tačkama; one su kao i sve polare za tačke na PO usporedne sa d_2.

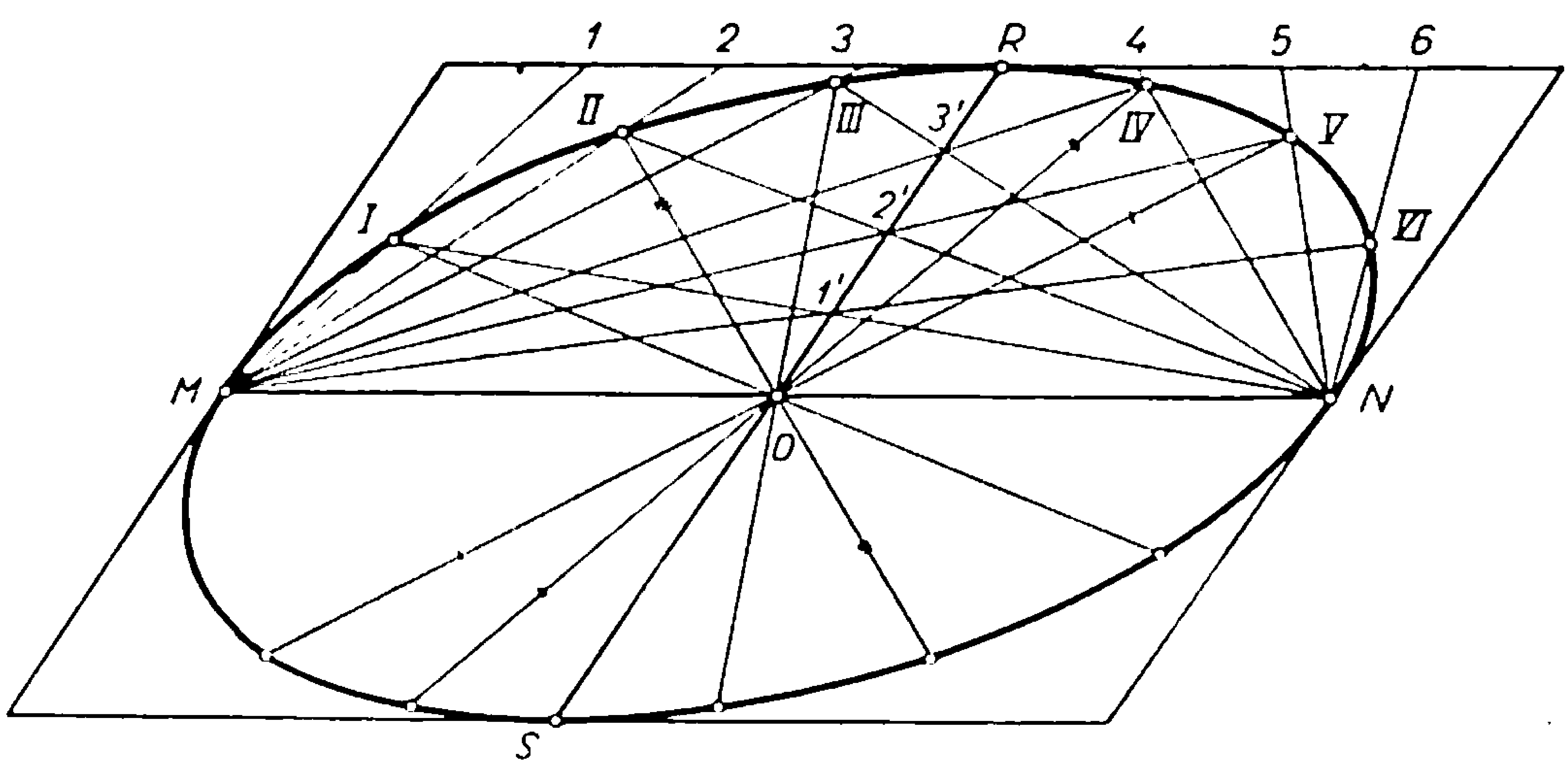
Jednadžbu promjera d_1 imali smo već pod (55).

Jednadžbu drugog konjugiranog promjera d_2 dobivamo iz jednadžbe polare (53), ako izostavimo član a^2b^2, jer d_2 prolazi ishodištem,

$$b^2x_0x + a^2y_0y = 0. \tag{56}$$

Na sličan način može se pokazati da će polare za sve polove na d_2 i tangente elipse u krajnjim tačkama M i N tog promjera biti usporedne s promjerom d_1 (vidi sl. 107).

Iz toga slijedi konstrukcija elipse iz zadanog para konjugiranih promjera MN i RS.

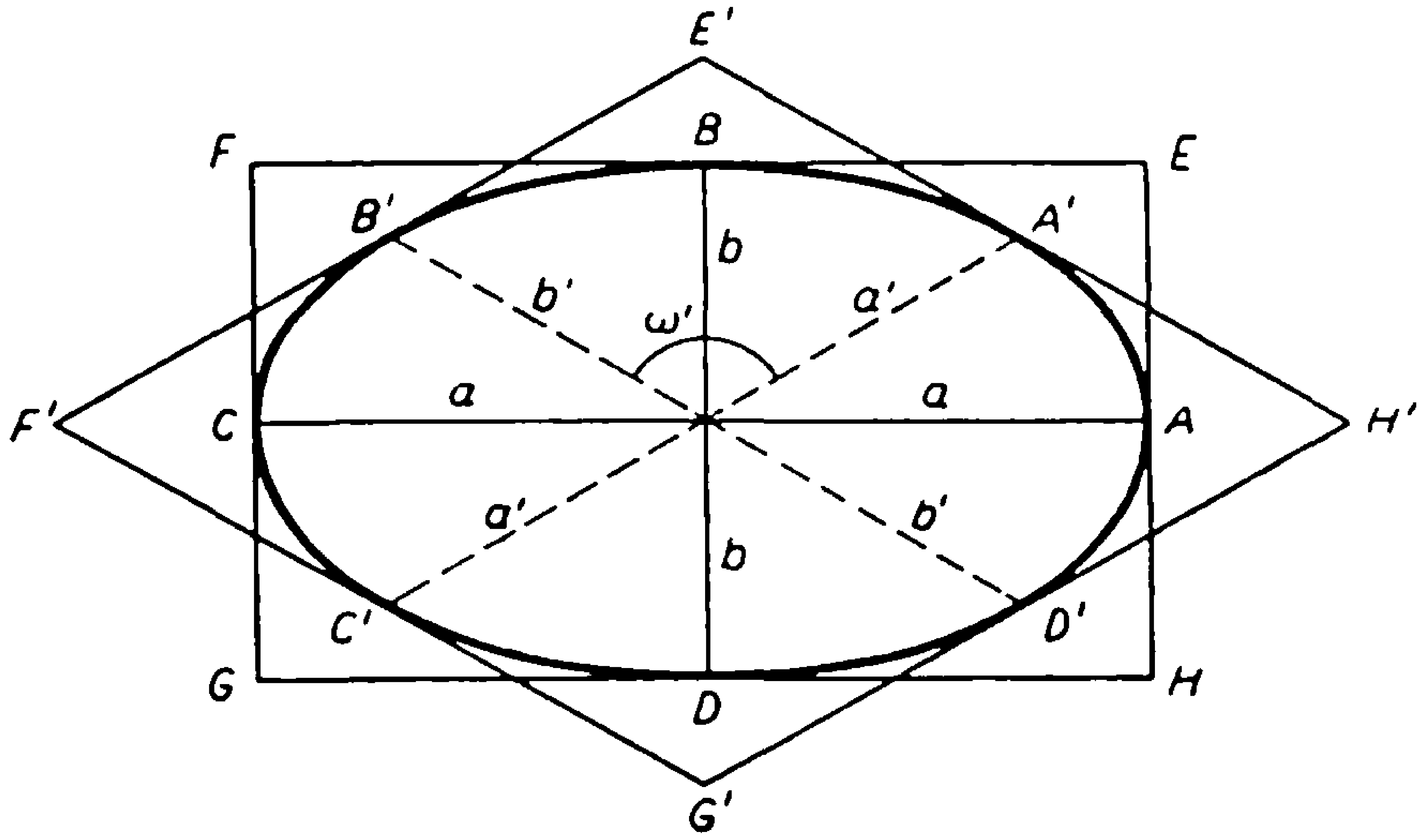


Sl. 109

Budući da smo konstruirali tangentni paralelogram, podjelimo u jednaki broj jednakih dijelova, npr. 4, obje polovine jedne stranice tog paralelograma i polovinu OR promjera elipse. Presjecišta spojnica $M1$ i $N1'$, $M2$ i $N2'$, $M3$ i $N3'$, a također $M3'$ i $N4$, i $M2'$ i $N5$, $M1'$ i $N6$ daju redne tačke elipse I, II, III, IV, V i VI.

Tačke donje polovine elipse dobiju se iz već određenih tačaka gornje polovine na temelju njihovog simetričnog položaja s obzirom na središte O elipse.

6. APOLONIJEVI TEOREMI



Sl. 110

1. **Zbroj kvadrata dvaju konjugiranih poludijametara elipse konstantna je veličina i jednaka zbroju kvadrata njenih poluosi**, tj.:

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2,$$

gdje su a' i b' konjugirani poludijametri, a i b poluosi elipse (vidi sl. 110).

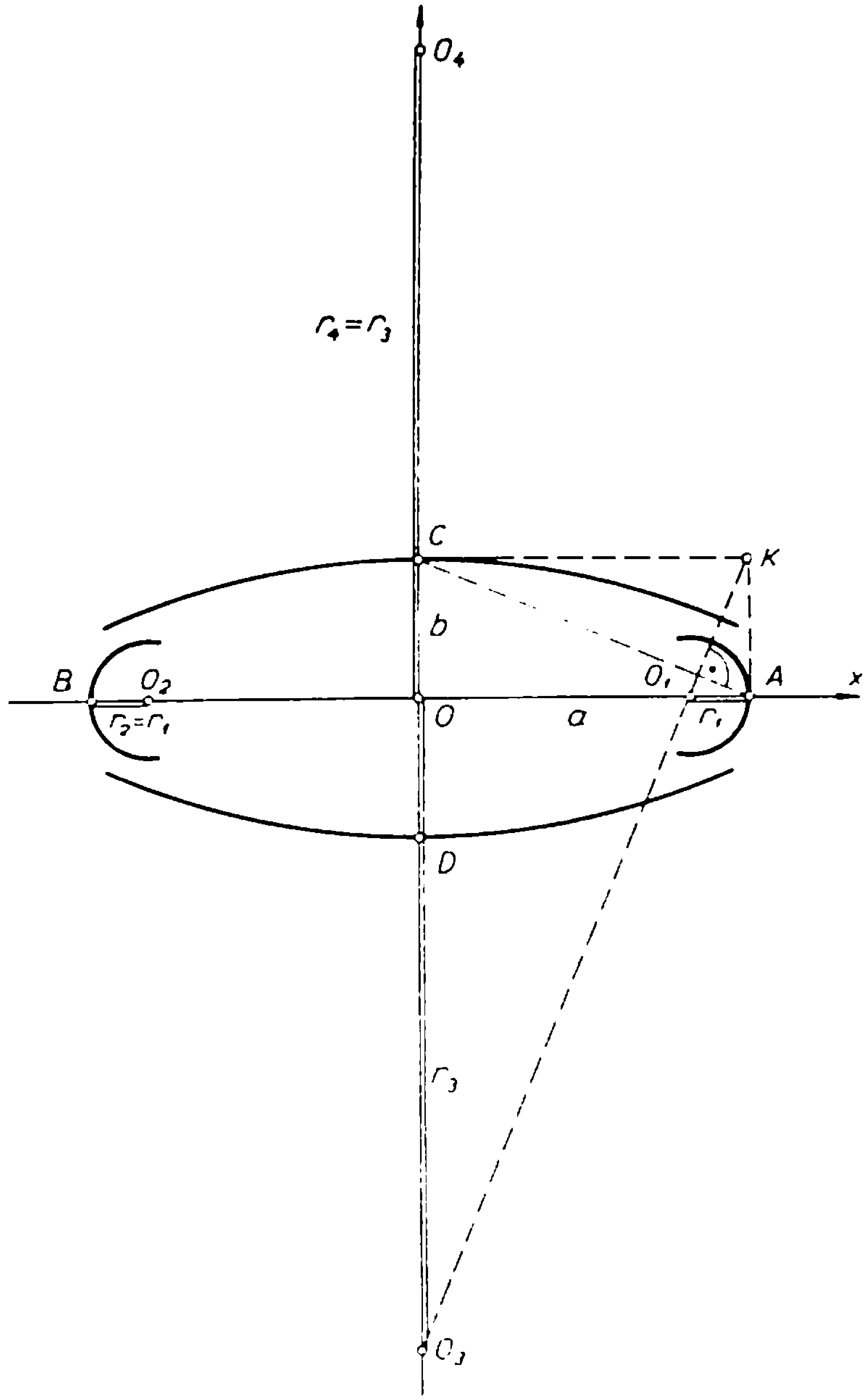
2. **Ploština paralelograma, koji određuju dva konjugirana poludijametra elipse, jednaka je ploštini pravokutnika nad poluosima krivulje, dakle je konstantna**, tj.:

$$a'b' \sin \omega' = ab.$$

Kako je tangenta na kraju dijametra usporedna s konjugiranim dijametrom, može se taj teorem izraziti u drugom obliku: **ploština opisanog paralelograma, kojemu su stranice usporedne s konjugiranim dijametrima elipse, jednaka je ploštini opisanog pravokutnika, kojemu su stranice usporedne s osima elipse**, tj.:

$$pl.\ E'F'G'H' = pl.\ EFGH. \text{ (Vidi sl. 110).}$$

7. PRIBLIŽNA KONSTRUKCIJA ELIPSE. POLUMJERI ZAKRIVLJENOSTI ELIPSE U VRHOVIMA. PLOŠTINA ELIPSE



Sl. 111

Približna konstrukcija elipse, za koju su poznate obje poluosi a i b, sastoji se u tome da se lukovi elipse u vrhovima A, B, C i D (sl. 111) zamjenjuju lukovima kružnica zakrivljenosti, koje pripadaju vrhovima elipse. Ti lukovi se međusobno spajaju u elipsu pomoću krivuljara.

Postupak.

Nanašaju se sva četiri vrha elipse A, B, C i D, pa se konstruira pravokutnik $OAKC$ s dijagonalom CA, na koju se povuče okomica iz tačke K. Ta okomica siječe osi elipse u tačkama O_1 i O_3, a to su središta zakrivljenosti za vrhove A i C, dok su O_1A i O_3C pripadni polumjeri zakrivljenosti. Iza toga se kroz vrhove elipse vuku lukovi kružnica iz O_1 i O_2 s polumjerom O_1A, a iz O_3 i O_4 s polumjerom O_3C.

Može se pokazati da su polumjeri zakrivljenosti u vrhovima elipse:

$$\left.\begin{aligned} O_1A = O_2B &= \frac{b^2}{a} \\ O_3C = O_4D &= \frac{a^2}{b}. \end{aligned}\right| \qquad (57)$$

Na kraju navedimo još formulu za plòštinu elipse:

$$P = a\,b\,\pi. \qquad (57a)$$

8. POPIS FORMULA I UPUTE ZA RJEŠAVANJE ZADATAKA U VEZI S ELIPSOM

Zadana elipsa ima središte u ishodištu $(0, 0)$, te njena jednadžba glasi:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

ili:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A. Zadano je diralište $T_1\,(x_1, y_1)$ tangente.

1. Jednadžba tangente:

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2.$$

2. Jednadžba normale:

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1),$$

gdje je k koeficijent smjera tangente, uzet iz jednadžbe tangente izračunate prema 1.

B. Diralište tangente nije zadano.

1. Jednadžba tangente:

$$y = kx + l.$$

Nepoznanice k i l odrede se

1) iz uvjetne jednadžbe: $l^2 = k^2a^2 + b^2$ i

2) iz još jedne jednadžbe, koju treba napisati prema onome, šta je u zadatku zadano.

2. Koordinate (x_1, y_1) dirališta tangente mogu se odrediti na dva načina

1) pomoću formula,

$$x_1 = -\frac{k\,a^2}{l},$$

$$y_1 = \frac{b^2}{l},$$

u koje se za k i l uvrste vrijednosti izračunate prema 1.

2) riješe se zajedno jednadžba zadane elipse i jednadžbe tangente izračunate prema 1. Kontrola računa diskriminanta $D = 0$

3. Jednadžba normale u diralištu (x_1, y_1)

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1),$$

gdje je k koeficijent smjera tangente, uzeti iz jednadžbe tangente izračunate prema 1.

4. Jednadžba polare

$$b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = a^2 b^2,$$

gdje su x_0 i y_0 koordinate pola.

Riješi li se sustav od jednadžbe polare i jednadžbe elipse, dobiju se koordinate dirališta tangenata iz pola P. Dalje se postupa, kako je pokazano pod A, pa se i na taj način mogu odrediti jednadžbe tangenata na elipsu iz zadane tačke P izvan elipse.

§ 10. HIPERBOLA

1. DEFINICIJA HIPERBOLE. LINEARNI I NUMERIČKI EKSCENTRICITET

Hiperbola je geometrijsko mjesto tačaka, za koje je razlika udaljenosti (razlika radija vektora r_1 i r_2) od dvije čvrste tačke (žarišta F_1 i F_2) stalna i jednaka glavnoj ili realnoj osi hiperbole $2a$.

Za svaku tačku hiperbole vrijedi dakle jednadžba:

$$r_2 - r_1 = 2a. \tag{58}$$

(Vidi sl. 112).

Druga os hiperbole $2b$ zove se sporedna ili imaginarna, jer hiperbola ne siječe tu os; dužina te osi određena je prema slici 112 izrazom:

$$b = \sqrt{e^2 - a^2}.$$

Odatle slijedi linearni ekscentricitet hiperbole:

$$e = \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{59}$$

i njen numerički ekscentricitet:

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \tag{60}$$

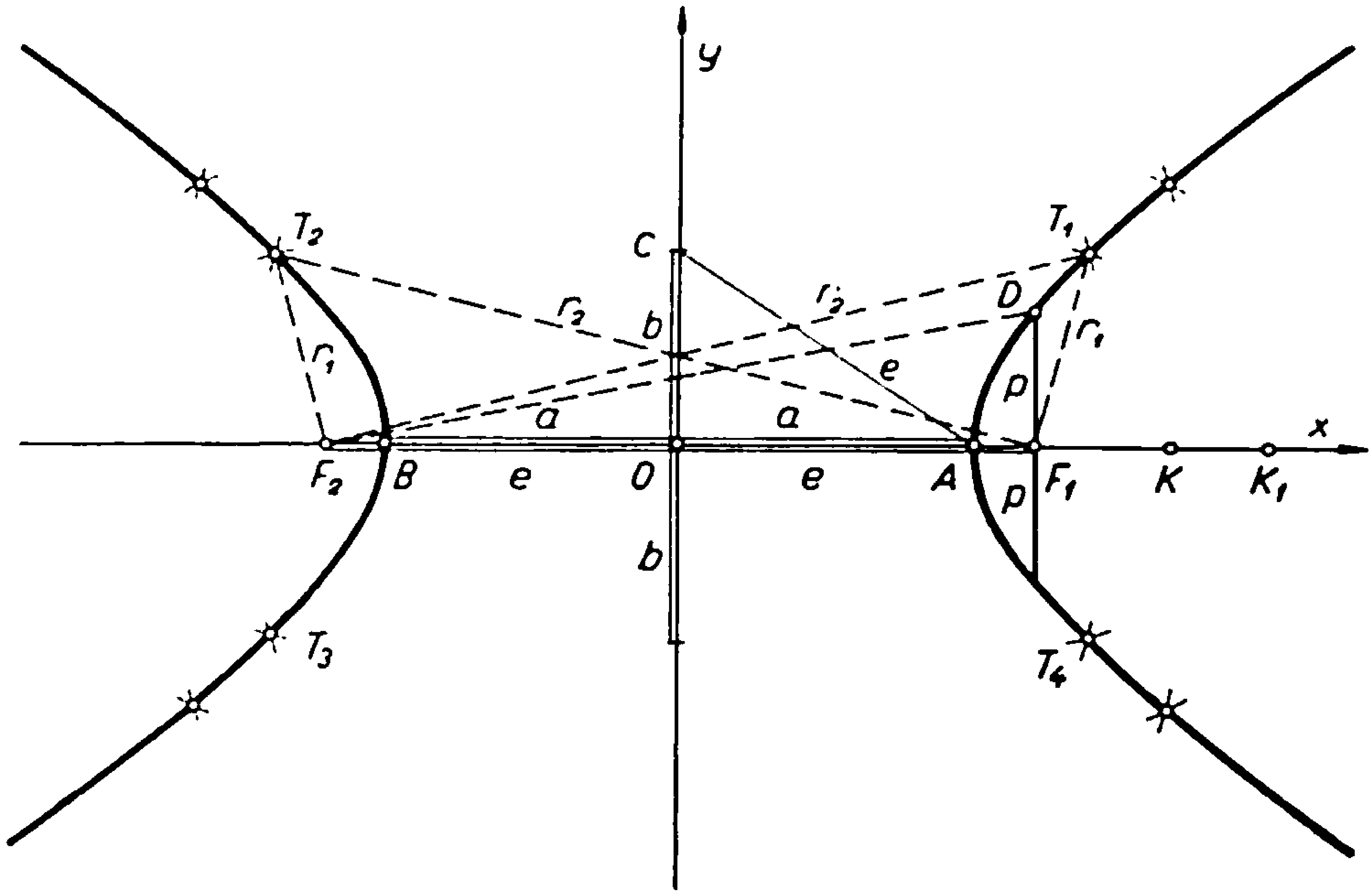
pri čemu je:

$$\varepsilon > 1 \text{ za hiperbolu,} \tag{61}$$

jer je e hipotenuza pravokutnog trokuta AOC s katetama a i b (vidi sl. 112).

2. KONSTRUKCIJA ŽARIŠTA HIPERBOLE I HIPERBOLE SAME. PARAMETAR HIPERBOLE

Iz definicije hiperbole i njezina ekscentriciteta slijedi konstrukcija fokusa i krivulje same iz zadanih osi hiperbole $2a$ i $2b$.



Sl. 112

U pravokutnom je trokutu AOC po Pitagorinu poučku hipotenuza $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$, a to je e prema (59). Uzmemo li, dakle, u šestilo dužinu $AC = e$, pa nanesemo li je nadesno i nalijevo od tačke O, dobit ćemo oba žarišta hiperbole F_1 i F_2 (vidi sl. 112).

Kako za svaku tačku hiperbole vrijedi jednakost $r_2 - r_1 = 2a$, dobit ćemo tačke hiperbole tako da iz žarišta F_1 i F_2 opišemo lukove nekog polumjera $BK > 2a$ i AK. Presjecišta T_1, T_2, T_3 i T_4 tih lukova su tačke hiperbole, jer je $BK - AK = r_2 - r_1 = 2a$. Na isti način možemo dobiti koliko god hoćemo tačaka hiperbole.

Polutetiva povučena kroz žarište hiperbole F_1 ili F_2 okomito na njenu glavnu os jest parametar hiperbole, čija se duljina označuje s p (vidi sl. 112.

Uzevši u obzir da je u pravokutnom trokutu $F_2 F_1 D$ kateta $F_2 F_1 = 2e = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ prema (59), a hipotenuza $F_2 D\, r_2 = p + 2a$, jer je za svaku tačku hiperbole $r_2 - r_1 = 2a$, dok je $D F_1 = r_1 = p$, dobivamo izraz za p a r a m e t a r p hiperbole:

$$p = \frac{b^2}{a}, \tag{62}$$

jer je prema Pitagorinu poučku:

$$(p + 2a)^2 = p^2 + (2\sqrt{a^2 + b^2})^2$$

ili $4ap + 4a^2 = 4a^2 + 4b^2$, odn. $ap = b^2$ pa je $p = \dfrac{b^2}{a}$

3. JEDNADŽBA HIPERBOLE

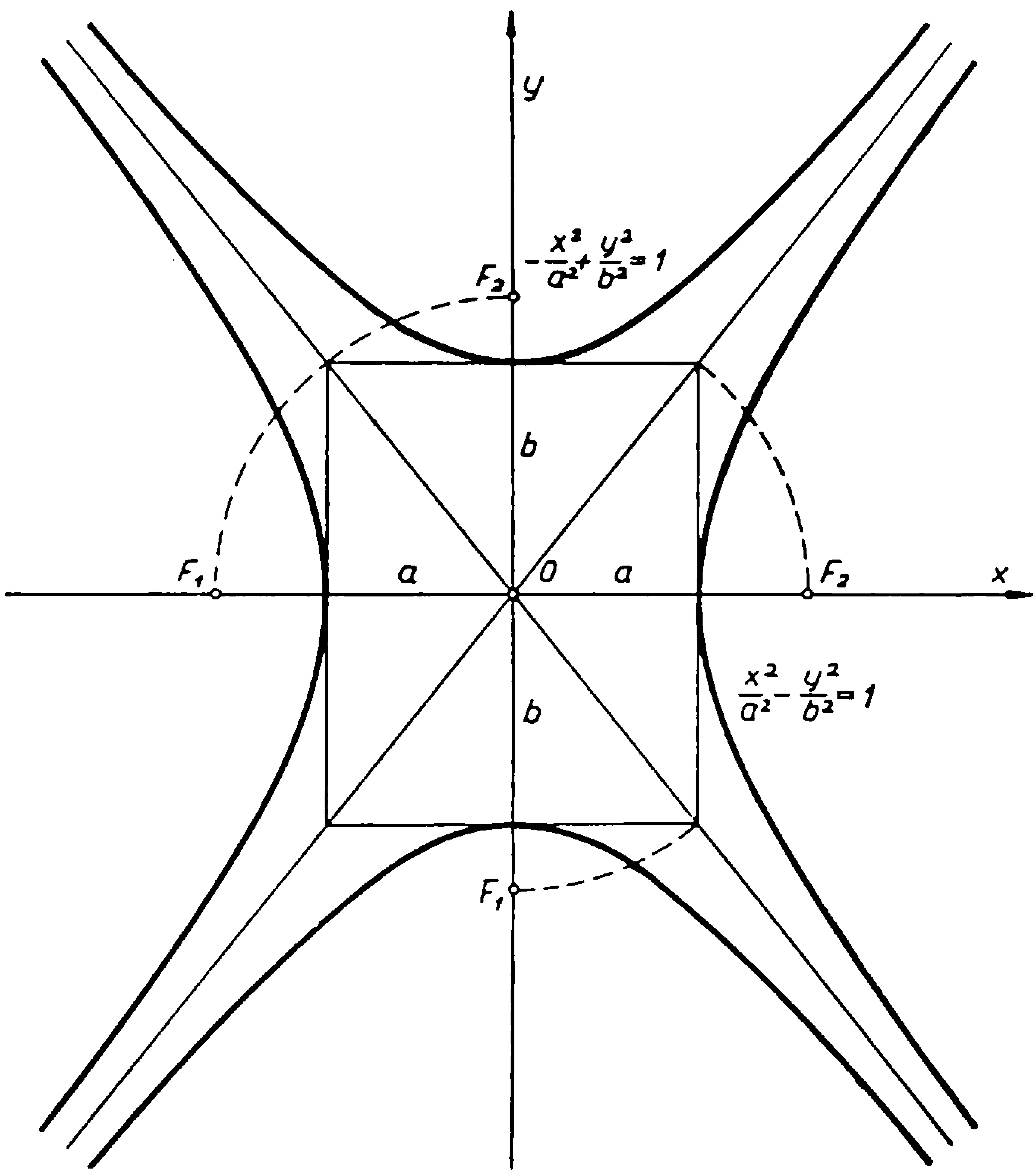
a) Središnja jednadžba hiperbole

S obzirom na koordinatni sustav kojemu se osi X i Y podudaraju s osima $2a$ i $2b$ hiperbole (vidi sl. 112), dobivamo na način koji je sličan onome kod elipse središnju jednadžbu hiperbole u obliku:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \tag{63}$$

ili:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{63a}$$



Sl. 113

ili u eksplicitnom obliku:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{63b}$$

Ima li jednadžba hiperbole oblik:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{64}$$

tada je a njena sporedna, a b glavna poluos (vidi sl. 113).

Hiperbole:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{i} \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

zovu se konjugirane.

Poseban slučaj. Istostrana hiperbola. Hiperbola s jednakim osima zove se istostrana. Uvrstimo li, dakle, u jednadžbu (63a) $b=a$, dobit ćemo jednadžbu istostrane hiperbole:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$$

ili:

$$x^2-y^2=a^2 \tag{65}$$

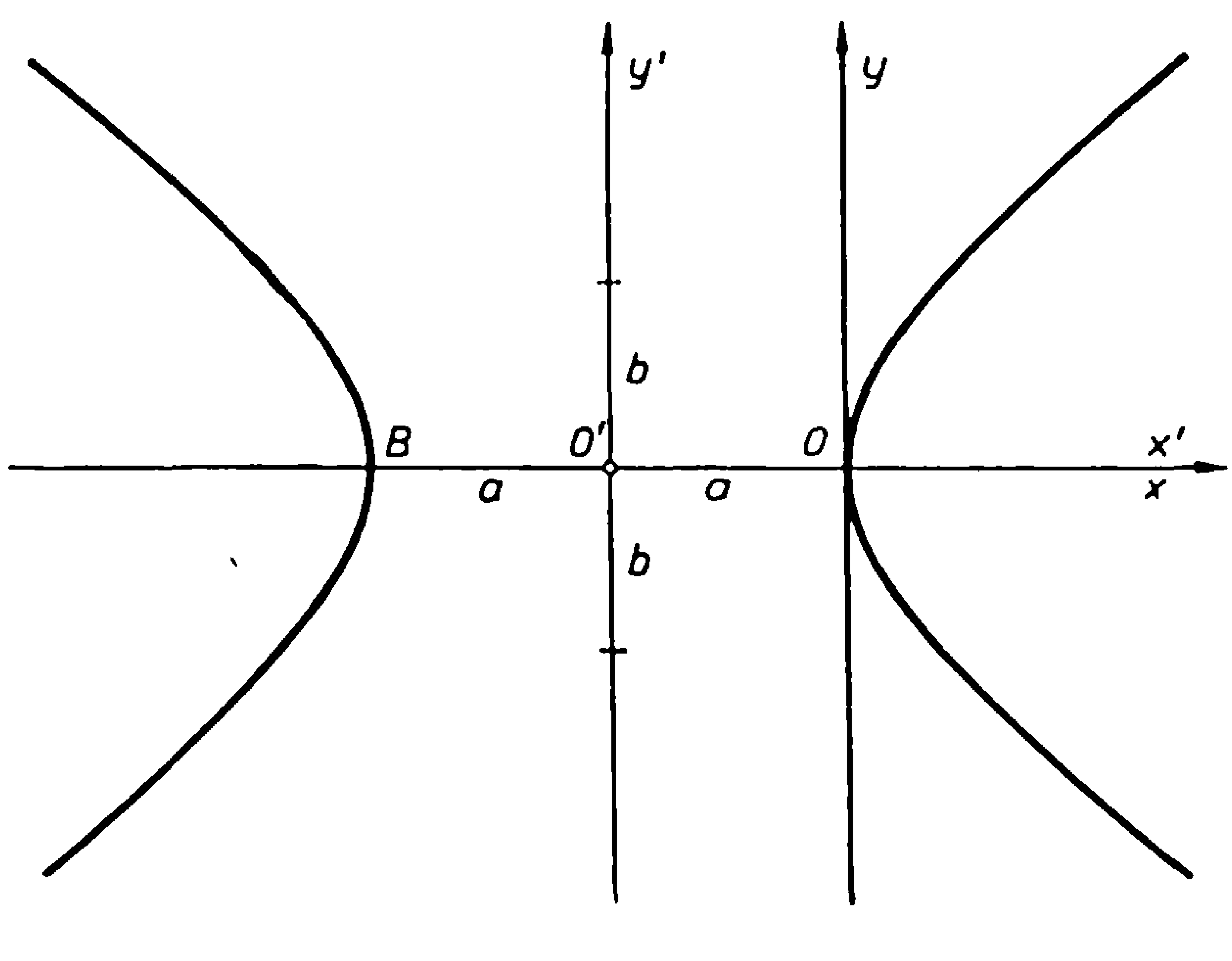
ili za:

$$a=1$$

$$x^2-y^2=1. \tag{65a}$$

Pazi! Središnja jednadžba kružnice polumjera $r=1$ glasi:

$$x^2+y^2=1.$$



Sl. 114

b) Vršna jednadžba hiperbole

Izvršimo li translaciju koordinatnog sustava $X'O'Y'$ (vidi sl. 114), s obzirom na koji hiperbola ima jednadžbu $b^2x'^2-a^2y'^2=a^2b^2$, u položaj XOY tako, da ishodište koordinatnog sustava dođe u desni vrh hiperbole, dobit ćemo na način koji je opisan kod elipse (vidi § 9, 3,b) i s obzirom na formulu (62) vršnu jednadžbu hiperbole:

$$y^2 = 2p\,x + \frac{p}{a}x^2. \tag{66}$$

4. PRAVAC I HIPERBOLA

a) Asimptote hiperbole i njihova konstrukcija

Do asimptota hiperbole dolazimo tako da potražimo koordinate presjecišta pravca $y = kx$, koji prolazi ishodištem, s hiperbolom $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, tj. riješimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{aligned} y &= kx \\ b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2. \end{aligned}\right|$$

Dobivamo:

$$x = \frac{\pm\, ab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}\,; \qquad y = \frac{\pm\, abk}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}.$$

Ako je izraz pod korijenom $b^2 - k^2a^2 > 0$, pravac $y = kx$ siječe hiperbolu u dvije tačke koje leže simetrično s obzirom na ishodište; za $b^2 - k^2a^2 < 0$, x i y su imaginarni, pa pravac hiperbolu ne siječe. Nas osobito zanima slučaj kad je:

$$b^2 - k^2a^2 = 0 \tag{a}$$

Tada je $x = \pm\infty$ i $y = \pm\infty$, tj. pravac ima s hiperbolom dvije zajedničke tačke u beskonačnosti.

Iz (a) slijedi:

$$k = \pm\frac{b}{a}. \tag{67}$$

Uvrstimo li taj izraz za koeficijent smjera k u jednadžbu pravca $y = kx$, dobit ćemo jednadžbe dvaju pravaca:

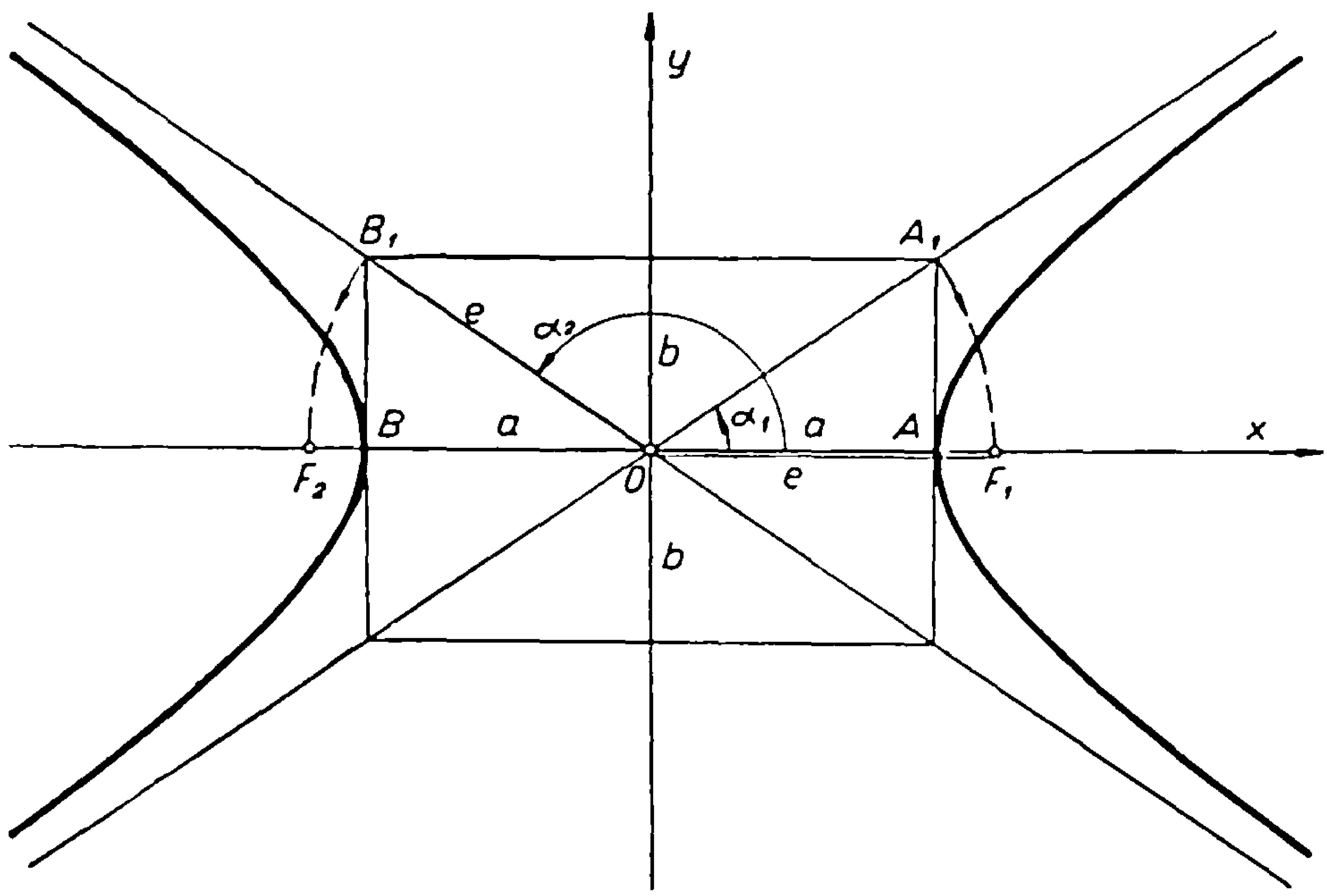
$$\left.\begin{aligned} y &= +\frac{b}{a}x \\ y &= -\frac{b}{a}x. \end{aligned}\right| \tag{68}$$

To su jednadžbe asimptota hiperbole, a jednadžba (67) daje njihove koeficijente smjera.

Načinimo li razliku između ordinate asimptote $y_a = \frac{b}{a} x$ i pripadne ordinate hiperbole $y_h = \frac{b}{a} \sqrt{y^2 - a^2}$ i to tako da načinimo razliku kvadrata tih jednadžbi, i uzmemo li u obzir da je $y^2_a - y^2_h = (y_a - y_h)(y_a + y_h)$, dobit ćemo za tačke prvog kvadranta izraz:

$$y_a - y_h = \frac{b^2}{y_a + y_h}$$

koji kazuje da je razlika $y_a - y_h$ uvijek pozitivna i da pada i teži k nuli kad nazivnik $y_a + y_h$ raste, a to znači da promatrani luk hiperbole leži uvijek ispod asimptote, kojoj se približava sve više i više, pa je dira u beskonačnosti. Asimptote su dakle tangente na hiperbolu u beskonačno dalekoj tački. Do sličnih zaključaka dolazimo promatrajući odnos asimptota i hiperbole u drugim kvadrantima.



Sl. 115

Iz jednadžbi asimptota slijedi neposredno njihova konstrukcija, ako su poznate obje osi $2a$ i $2b$ hiperbole. Konstruiramo li pravokutnik sa stranicama $2a$ i $2b$, kako to pokazuje slika 115, bit će produžene dijagonale tog pravokutnika baš asimptote zadane hiperbole, jer iz pravokutnih trokuta OAA_1 i OBB_1 slijedi:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} (180^0 - \alpha_1) = - \operatorname{tg} \alpha_1 = - \frac{b}{a}$$

a to su prema (67) koeficijenti smjera asimptota.

Primjedba 1.

Približna slika hiperbole riše se tako da se u kutove asimptota konstruiranih na gore opisan način prostoručno urišu obje grane krivulje.

Primjedba 2.

Iz pravokutnog trokuta OAA_1 (vidi sl. 115) slijedi: $OA_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$, a to je e prema (59). Drugim riječima, poludijagonala pravokutnika jednaka je linearnom ekscentricitetu hiperbole. Odatle slijedi konstrukcija žarišta F_1 i F_2 hiperbole, koja je prikazana na slici 115.

Primjedba 3.

Za istostranu hiperbolu pravokutnik predočen na slici 115 prima oblik kvadrata, jer je $b = a$, a jednadžbe asimptota istostrane hiperbole prema (68) glase: $y = x$ i $y = -x$. To su raspolovnice kvadranata koordinatnog sustava.

Primjer:

Treba izračunati osi, linearni i numerički ekscentricitet i parametar hiperbole $9x^2 - 4y^2 = 9$, napisati jednadžbe njenih asimptota i izračunati kutove koje asimptote zatvaraju s osi $+X$.

$$9x^2 - 4y^2 = 9 \,/ : 9$$

$$x^2 - \frac{4}{9}y^2 = 1$$

ili:
$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1.$$

odatle:
$$a^2 = 1; \quad \underline{a = 1}; \quad \underline{2a = 2}.$$

$$b^2 = \frac{9}{4}; \quad \underline{b = \frac{3}{2}}; \quad \underline{2b = 3}.$$

Prema (59): $$e = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{3{,}61}{2} = \underline{1{,}80}.$$

Prema (60): $$\varepsilon = \frac{1{,}80}{1} = \underline{1{,}80} \quad (> 1).$$

Prema (62): $$p = \frac{\frac{9}{4}}{1} = \underline{\frac{9}{4}}; \qquad \underline{2p = \frac{9}{2}}.$$

Prema (68) dobivamo jednadžbe asimptota:

$$\underline{\text{I.} \quad y = \frac{3}{2}x}, \qquad \underline{\text{II.} \quad y = -\frac{3}{2}x}.$$

Koeficijent smjera asimptote I:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\log \operatorname{tg} \alpha_1 = 0,17609 = 10,17609 - 10$$

$$\underline{\alpha_1 = 56^0\,18'\,35''.}$$

Koeficijent smjera asimptote II:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{3}{2} = -1,5.$$

$$\alpha_2 = 180^0 - \alpha_1 = 180^0 - 56^0\,18'\,35'' = \underline{123^0\,41'\,25''}$$

b) Jednadžbe tangente, normale i polare, povučenih u zadanoj tački hiperbole

Na način koji je opisan kod kružnice i elipse dobiva se

1) uvjetna jednadžba:

$$l^2 = k^2a^2 - b^2, \tag{69}$$

kojoj moraju zadovoljavati koeficijent smjera k i odsječak l na osi Y pravca $y = kx + l$, da taj pravac bude tangenta hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, a koordinate dirališta tangente odrede se iz formula

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\frac{ka^2}{l} \\ y_1 &= -\frac{b^2}{l}; \end{aligned}\right| \tag{69a}$$

2) jednadžba tangente u tački $T_1\,(x_1, y_1)$ hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

$$b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2 \tag{70}$$

ili u eksplicitnom obliku:

$$y = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}x - \frac{b^2}{y_1},$$

pa je: $k = \dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$ koeficijent smjera tangente; (71)

3) jednadžba normale u istoj tački $T_1\,(x_1, y_1)$ hiperbole:

$$y - y_1 = -\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1), \tag{72}$$

4) jednadžba polare.

$$b^2 x_0 x - a^2 y_0 y = a^2 b^2, \tag{73}$$

gdje su x_0 i y_0 koordinate pola P.

Usporedimo li jednadžbe koje smo napisali za hiperbolu s pripadnim jednadžbama elipse, opažamo da se te jednadžbe razlikuju samo u predznaku jednog člana.

c) Konstrukcija tangente u zadanoj tački hiperbole

Konstrukcija tangente u zadanoj tački T_1 hiperbole osniva se na njenom svojstvu da raspolavlja nutarnji kut, koji čine radij-vektori povučeni u diralište. (Vidi dalje primjer 1. i sl. 116, na kojoj je prikazana konstrukcija tangente).

d) Jednadžbe tangenata povučenih iz zadane tačke izvan hiperbole

Kao i kod elipse, jednadžbe tangenata povučenih na hiperbolu $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ iz zadane tačke $P(x_0, y_0)$ možemo napisati na dva načina, i to pomoću uvjetne jednadžbe ili pomoću jednadžbe polare.

(Vidi dalje primjer 2. i sl. 117, na kojoj je također prikazana konstrukcija tih tangenata).

Primjer 1:

Treba napisati jednadžbe tangente i normale povučene na hiperbolu $25x^2 - 9y^2 = 225$ u tački $T_1\left(5, -\frac{20}{3}\right)$ hiperbole (sl. 116).

$$25x^2 - 9y^2 = 225.$$

Kako je $25 \cdot 9 = 225$, slijedi s obzirom na (63)

$$b^2 = 25; \qquad a^2 = 9.$$

Prema (70):

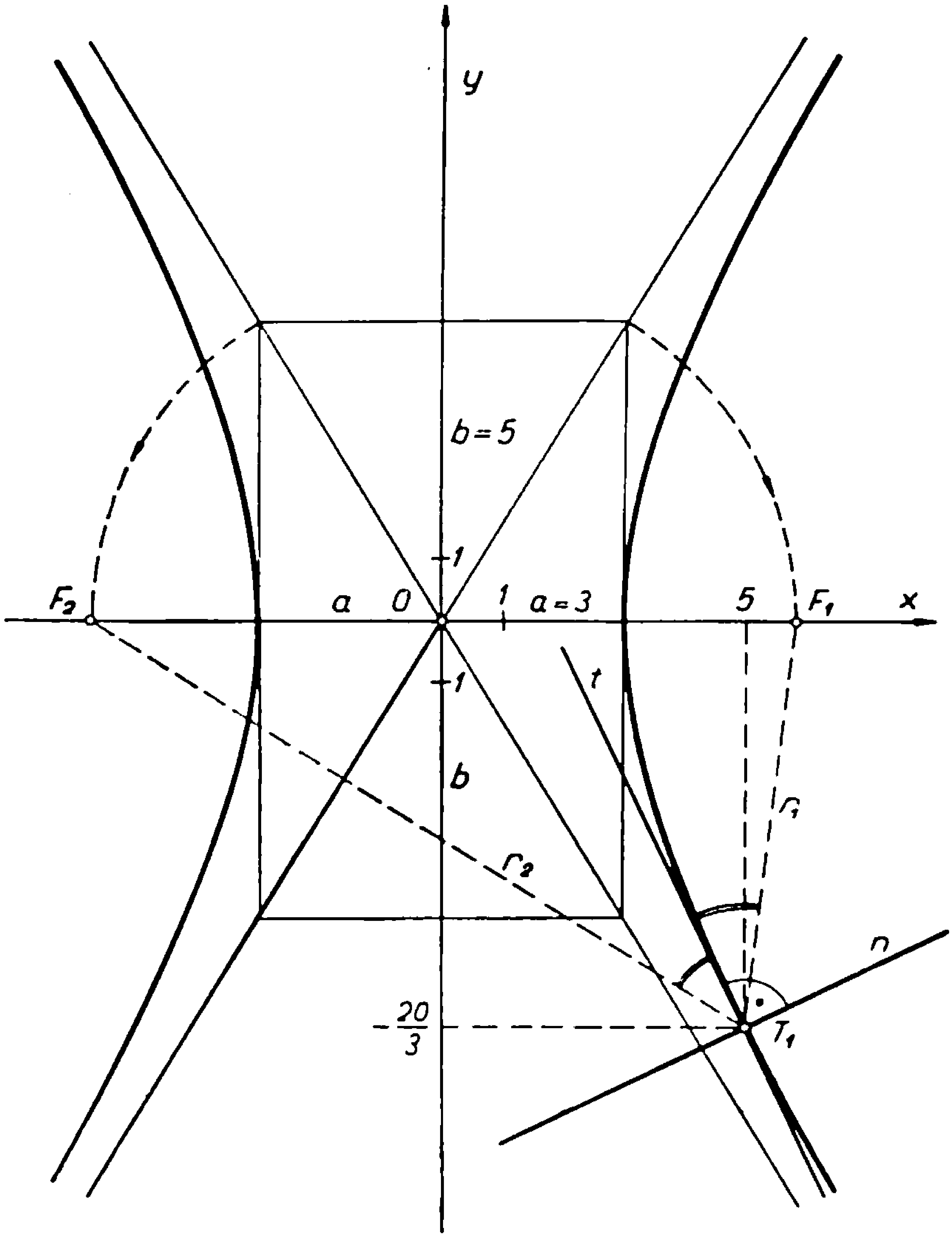
$$25 \cdot 5x + 9 \cdot \frac{20}{3} y = 225 / : 5$$

$$\underline{25x + 12y - 45 = 0}$$

ili: $$\underline{y = -\frac{25}{12}x + \frac{45}{12}}$$

ili: $$\underline{y = -2{,}08x + 3{,}75.}$$

tražene jednadžbe tangente.



Sl. 116

Prema (72):

$$y + \frac{20}{3} = + \frac{9 \cdot 20}{3 \cdot 25 \cdot 5}(x - 5)$$

$$y + \frac{20}{3} = \frac{12}{25}x - \frac{12}{5}$$

ili:

$$y = \frac{12}{25}x - \frac{136}{15}$$

ili: $\underline{y = 0{,}48x - 9{,}07}$

ili: $\underline{36x - 75y - 680 = 0.}$

tražene jednadžbe normale.

(Vidi sl. 116, u kojoj je isti primjer riješen grafički.)

Primjer 2.

Treba napisati jednadžbe tangenata povučenih na hiperbolu $x^2 - y^2 = 64$ iz tačke $P\,(12, \frac{28}{3})$ i odrediti koordinate dirališta tih tangenata (vidi sl. 110)!

$$x^2 - y^2 = 64 \;/ : 64$$

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{64} = 1$$

$a = b = \sqrt{64} = 8$ — istostrana hiperbola

1. način:

Tangenta $y = kx + l$ prolazi tačkom P, dakle:

$$\frac{28}{3} = 12k + l,$$

a prema (69):

$$l^2 = 64k^2 - 64.$$

Iz tog sustava jednadžbi odredimo k i l

Iz 1. jednadžbe slijedi:

$$l = -12k + \frac{28}{3} \tag{a}$$

Uvrštenje u 2. jednadžbu daje:

$$144k^2 - 224k + \frac{784}{9} = 64k^2 - 64$$

ili:

$$80k^2 - 224k + \frac{1360}{9} = 0 / : 80$$

$$k^2 - \frac{14}{5}k + \frac{17}{9} = 0.$$

Odatle: $$k_{1,2} = \frac{7}{5} \pm \sqrt{\frac{49}{25} - \frac{17}{9}}$$

$$k_{1,2} = \frac{7}{5} \pm \frac{\sqrt{441 - 425}}{15}$$

$$k_{1,2} = \frac{7}{5} \pm \frac{4}{15}$$

$$k_1 = \frac{5}{3}; \qquad k_2 = \frac{17}{15}$$

Prema (a): $$l_1 = -\frac{32}{3}; \qquad l_2 = -\frac{64}{15}.$$

Uvrštenje u $y = kx + l$ daje:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{y = \frac{5}{3}x - \frac{32}{3}} \\ \underline{y = \frac{17}{15}x - \frac{64}{15}} \end{array}\right|$$ tražene jednadžbe tangenata.

ili u implicitnom obliku:

$$\underline{5x - 3y - 32 = 0}$$

$$\underline{17x - 15y - 64 = 0.}$$

Koordinate dirališta T_1 (x_1, y_1) i T_2 (x_2, y_2) tangenata dobivamo pomoću formula (69a). U tu svrhu uvrstimo:

za tangentu t_1: $\qquad k_1 = \frac{17}{15}, \quad l_1 = -\frac{64}{15},$

$$a^2 = 64, \qquad b^2 = 64:$$

za tangentu t_2: $\qquad k_2 = \frac{5}{3}, \quad l_2 = -\frac{32}{3},$

$$a^2 = 64, \qquad b^2 = 64.$$

Dobivamo:

za tangentu t_1: $\quad x_1 = 17, \quad y_1 = 15;$

za tangentu t_2: $\quad x_2 = 10, \quad y_2 = 6.$

Dirališta tangenata: $\underline{T_1\ (17, 15)\ \text{i}\ T_2\ (10,6).}$

(Vidi sl. 117 na kojoj je taj primjer prikazan grafički.,

2. način.

Napisavši prema (73) jednadžbu polare, dobivamo sustav jednadžbi za određivanje koordinata dirališta:

$$\left.\begin{array}{c} x^2 - y^2 = 64 \\ 64 \cdot 12\,x - 64 \cdot \frac{28}{3}\,y = 64 \cdot 64 \end{array}\right|$$

ili:

$$\left.\begin{array}{c} x^2 - y^2 = 64 \\ 12\,x - \frac{28}{3}\,y = 64. \end{array}\right|$$

Iz 2. jednadžbe slijedi:

$$x = \frac{7}{9} y + \frac{16}{3},$$

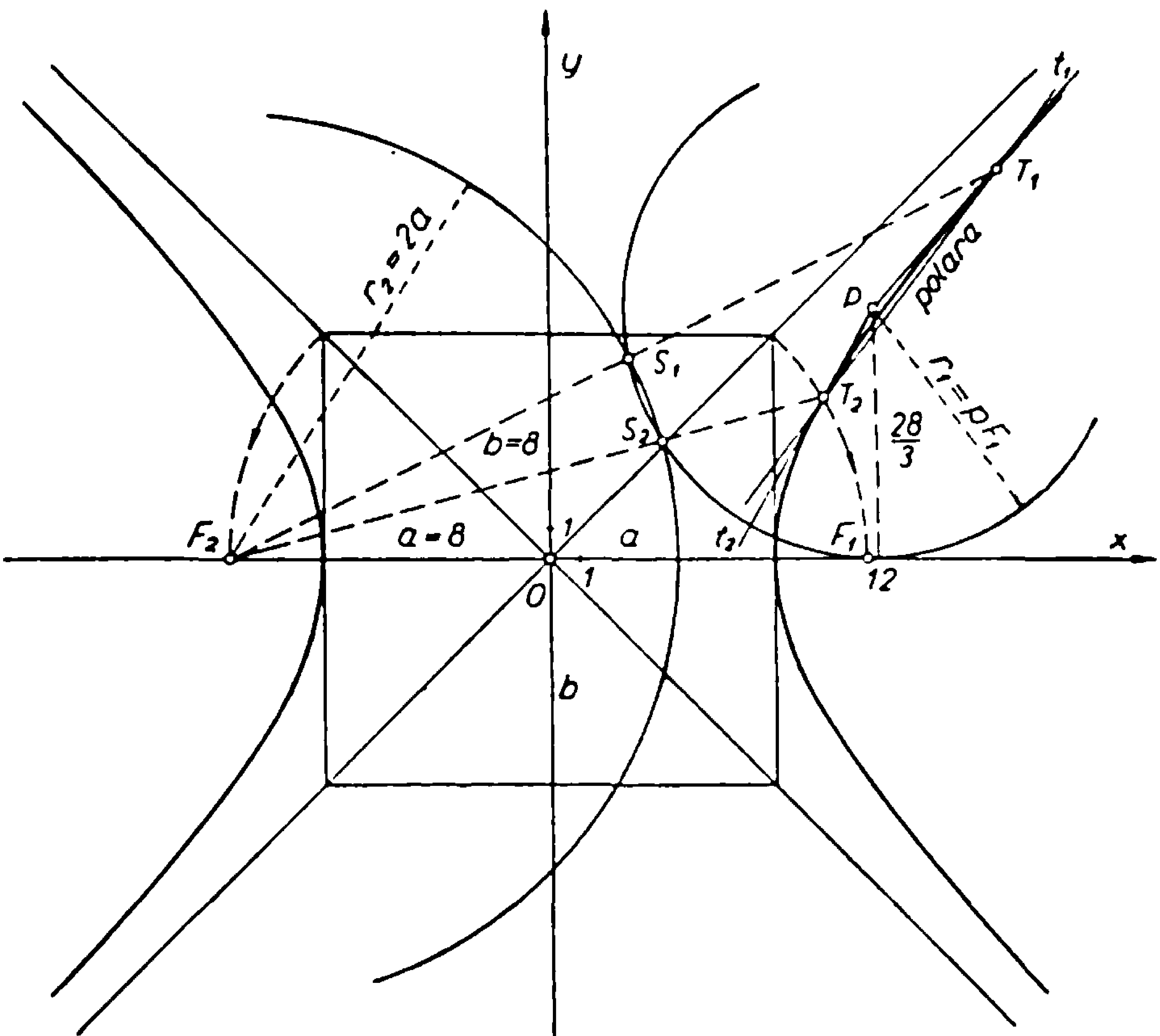
a uvrštenje u 1. jednadžbu daje:

$$\frac{49}{81} y^2 + \frac{224}{27} y + \frac{256}{9} - y^2 = 64$$

ili:

$$-\frac{32}{81} y^2 + \frac{224}{27} y - \frac{320}{9} = 0 / \cdot \left(-\frac{81}{32}\right)$$

$$y^2 - 21\, y + 90 = 0.$$



Sl. 117

Odatle:

$$y_{1,2} = +\frac{21}{2} \pm \sqrt{\frac{441}{4} - 90}$$

$$y_{1,2} = \frac{21}{2} \pm \frac{9}{2}$$

$$y_1 = 15; \qquad y_2 = 6$$

$$x_1 = 17; \qquad x_2 = 10.$$

Dakle su dirališta tangenata: $\underline{T_1\,(17, 15)}$ i $\underline{T_2\,(10, 6)}$.

Uvrštenje koordinata dirališta i $a^2 = b^2 = 64$ u formulu (70) daje:

$$64 \cdot 17\,x - 64 \cdot 15\,y = 64 \cdot 64$$
$$64 \cdot 10\,x - 64 \cdot 6\,y = 64 \cdot 64$$

ili:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{17\,x - 15\,y - 64 = 0} \;\ldots\; t_1 \\ \underline{5\,x - 3\,y - 32 = 0} \;\ldots\; t_2 \end{array}\right| \text{ tražene jednadžbe tangenata.}$$

(Vidi sl. 117.)

e) Konstrukcija tangenata povučenih iz tačke izvan hiperbole

Slika 117, na kojoj je primjer 2 riješen grafički, prikazuje tu konstrukciju.

Lukovi kružnica povučenih iz P polumjerom $r = PF_1$ i iz žarišta F_2 polumjerom $r = 2\,a$ sijeku se u suprotištima S_1 i S_2. Spojnice žarišta F_2 sa suprotištima sijeku hiperbolu u diralištima T_1 i T_2 traženih tangenata.

5. JEDNADŽBA ISTOSTRANE HIPERBOLE S OBZIROM NA KOORDINATNI SUSTAV, ČIJE SE OSI PODUDARAJU S ASIMPTOTAMA HIPERBOLE

Jednadžba istostrane hiperbole s obzirom na koordinatni sustav $X'\,O\,Y'$ prema (65) glasi:

$$x'^2 - y'^2 = a^2. \tag{a}$$

Okrenimo koordinatni sustav $X'OY'$ oko ishodišta O za kut $\alpha = 45^0$ u položaj $X\,O\,Y$, tj. tako da se koordinatne osi poklope s asimptotama hiperbole (vidi sl. 118).

Prema (6) imamo tada:

$$x' = x \cdot \cos\,(-45^0) - y \cdot \sin\,(-45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$$

$$y' = x \cdot \sin\,(-45^0) + y \cdot \cos\,(-45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y)$$

Uvrstimo u (a):

$$\frac{1}{2}(x + y)^2 - \frac{1}{2}(-x + y)^2 = a^2$$

Odatle dobivamo traženu jednadžbu hiperbole:

$$\text{ili:}\quad \left.\begin{array}{l} xy = \dfrac{a^2}{2} \\[2ex] y = \dfrac{a^2}{2} \cdot \dfrac{1}{x}. \end{array}\right| \tag{74}$$

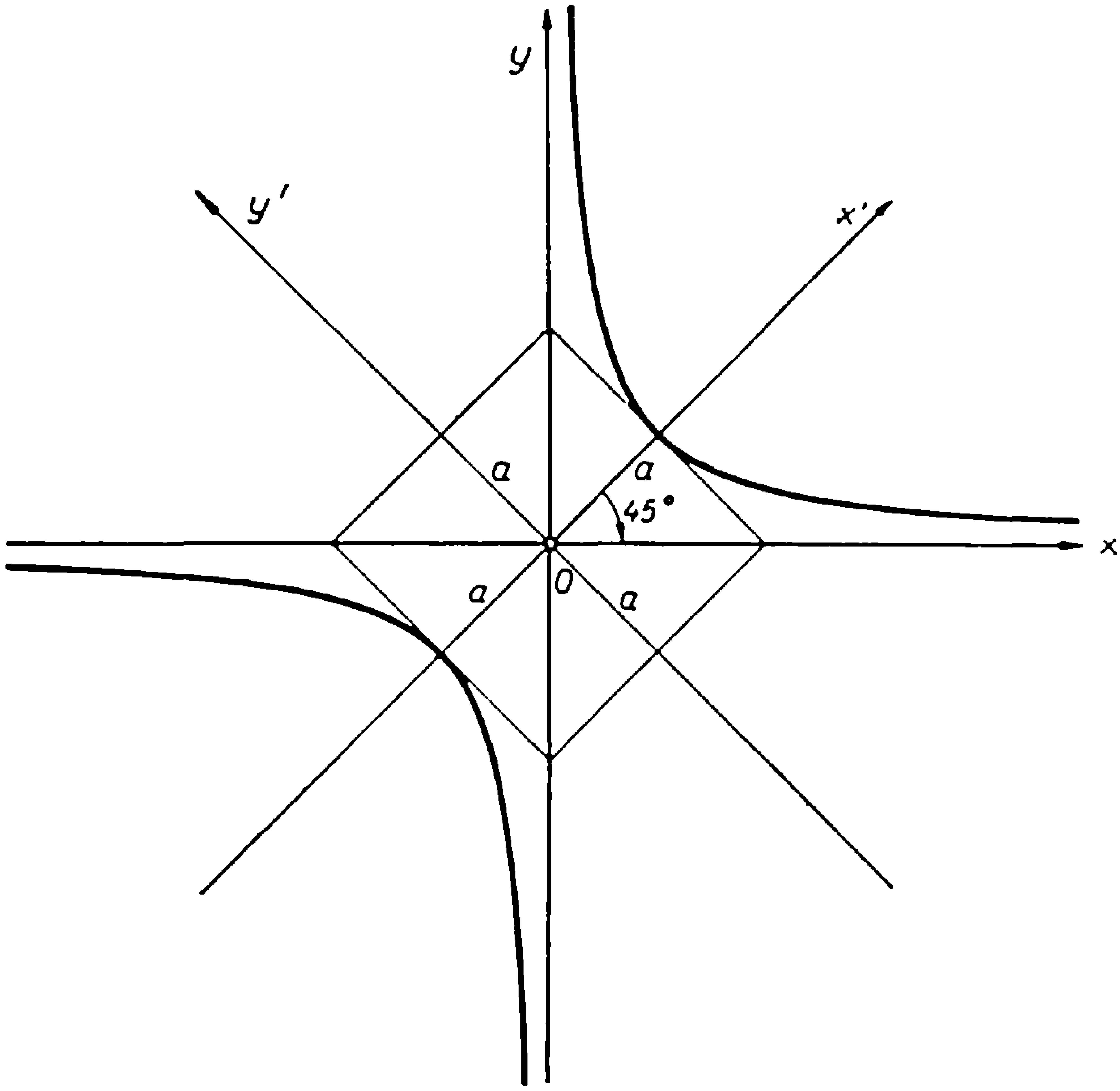
6. POPIS FORMULA I UPUTE ZA RJEŠAVANJE ZADATAKA U VEZI S HIPERBOLOM

Zadana hiperbola ima središte u ishodištu (0, 0), te njena jednadžba glasi:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

ili:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Sl. 118

A. Zadano je diralište $T_1 (x_1, y_1)$ tangente.

1. Jednadžba tangente:

$$b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2.$$

2. Jednadžba normale:

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1),$$

gdje je k koeficijent smjera tangente, uzet iz jednadžbe tangente izračunate prema 1.

B. Diralište tangente nije zadano.

1. Jednadžba tangente: $y = kx + l.$

Nepoznanice k i l odrede se

1) iz uvjetne jednadžbe: $l^2 = k^2 a^2 - b^2$ i

2) iz još jedne jednadžbe, koju treba napisati prema onome što je u zadatku zadano.

2. Koordinate (x_1, y_1) dirališta tangente mogu se odrediti na dva načina

1) pomoću formula:

$$x_1 = -\frac{k a^2}{l}$$

$$y_1 = -\frac{b^2}{l},$$

u koje se za k i l uvrste vrijednosti izračunate prema 1.

2) riješe se zajedno jednadžba zadane hiperbole i jednadžba zadane tangente izračunate prema 1. Kontrola računa: diskriminanta $D = 0$.

3. Jednadžba normale u diralištu $T_1(x_1, y_1)$;

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1),$$

gdje je k koeficijent smjera tangente, uzet iz jednadžbe tangente izračunate prema 1.

4. Jednadžba polare:

$$b^2 x_0 x - a^2 y_0 y = a^2 b^2,$$

gdje su x_0 i y_0 koordinate pola.

Riješi li se sustav od jednadžbe polare i jednadžbe hiperbole, dobiju koordinate dirališta tangenata na hiperbolu iz pola P. Dalje se postupa ako je pokazano pod A, pa se i na taj način mogu odrediti jednadžbe angenata na hiperbolu iz zadane tačke P izvan hiperbole.

C. Jednadžbe asimptota:

$$y = \frac{b}{a} x\,; \quad y = -\frac{b}{a} x.$$

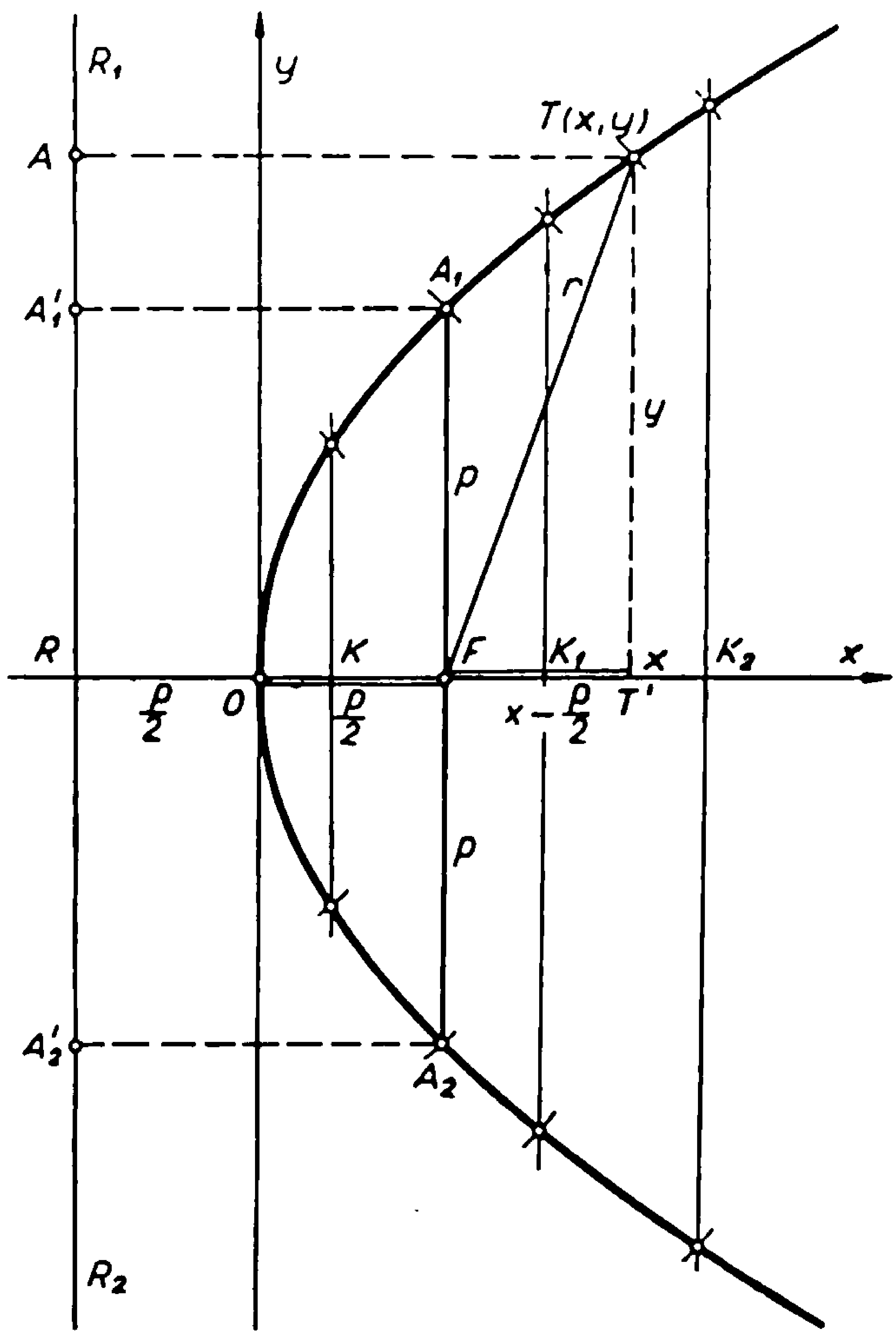
§ 11. PARABOLA

1. DEFINICIJA I KONSTRUKCIJA PARABOLE. NJEN PARAMETAR I NUMERIČKI EKSCENTRICITET

Parabola je geometrijsko mjesto tačaka, za koje je udaljenost od čvrste tačke, žarišta, (fokusa) jednaka udaljenosti od čvrstog pravca — *ravnalice.*

Iz definicije parabole slijedi njena konstrukcija. (Vidi sl. 119).

Nanesemo li na os X dužine $OF = OR = p/2$ i uzmemo li da je F žarište parabole, a pravac R_1RR_2, koji je okomit na os X, njena ravnalica, bit će prema definiciji parabole ishodište O jedna tačka parabole.



Sl. 119

Nanesemo li na okomicu povučenu na os X kroz žarište F dužine $FA_1 = FA_2 = p$, dobit ćemo još dvije tačke A_1 i A_2 parabole, jer je prema slici 119: $FA_1 = A_1A'_1 = FR = p$, i $FA_2 = A_2A'_2 = FR = p$. Ostale tačke parabole dobit ćemo tako da os X siječemo okomicama K, K_1, K_2 itd. pa iz fokusa F, kao središta, siječemo te okomice kružnim lukovima polumjera RK, RK_1, RK_2. . ., koji su jednaki udaljenostima tih okomica od ravnalice. Na taj način možemo dobiti koliko god želimo tačaka parabole.

Dužina $2p$ tetive koja je povučena kroz žarište F okomito na os parabole (os X) zove se p a r a m e t a r p a r a b o l e, koji je također jednak četverostrukoj udaljenosti žarišta od vrha parabole.

Parabola nema središta, pa se za n u m e r i č k i e k s c e n t r i t e t uzima omjer ordinate parabole u žarištu, tj. poluparametra p, i udaljenosti p žarišta od ravnalice:

$$\varepsilon = \frac{p}{p} = 1 \quad \text{za parabolu.} \tag{75}$$

2. VRŠNA JEDNADŽBA PARABOLE

Iz svojstava parabole slijedi za koju god tačku $T(x, y)$ te krivulje:

$$FT = TA$$

a kako na sl. 119 vidimo da je FT hipotenuza pravokutnog $\triangle FT'T$, dok je $TA = T'R = \frac{p}{2} + x$, dobivamo:

$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = \frac{p}{2} + x \quad /^2$$

$$y^2 + x^2 - px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} + px + x^2$$

ili:

$$y^2 = 2px \tag{76}$$

To je v r š n a j e d n a d ž b a p a r a b o l e, koju možemo pisati i ovako:

$$y = \pm\sqrt{2px} \tag{76a}$$

Iz slike 119 vidi se približna konstrukcija parabole kojoj je zadana jednadžba $y^2 = 2px$. Na os X nanese se $p/2$, pa se dobije žarište F, u F se konstruira okomica na os X na koje se nanesu gore i dolje poluparametri p. Vidi također sl. 120, na kojoj su konstruirane parabole kojima je $2p = 4$, pa je $p = 2$ i $p/2 = 1$.

Ako je parabola otvorena prema l i j e v o, ona ima jednadžbu

$$y^2 = -2px$$

ili:

$$y = \pm\sqrt{-2px}, \tag{76b}$$

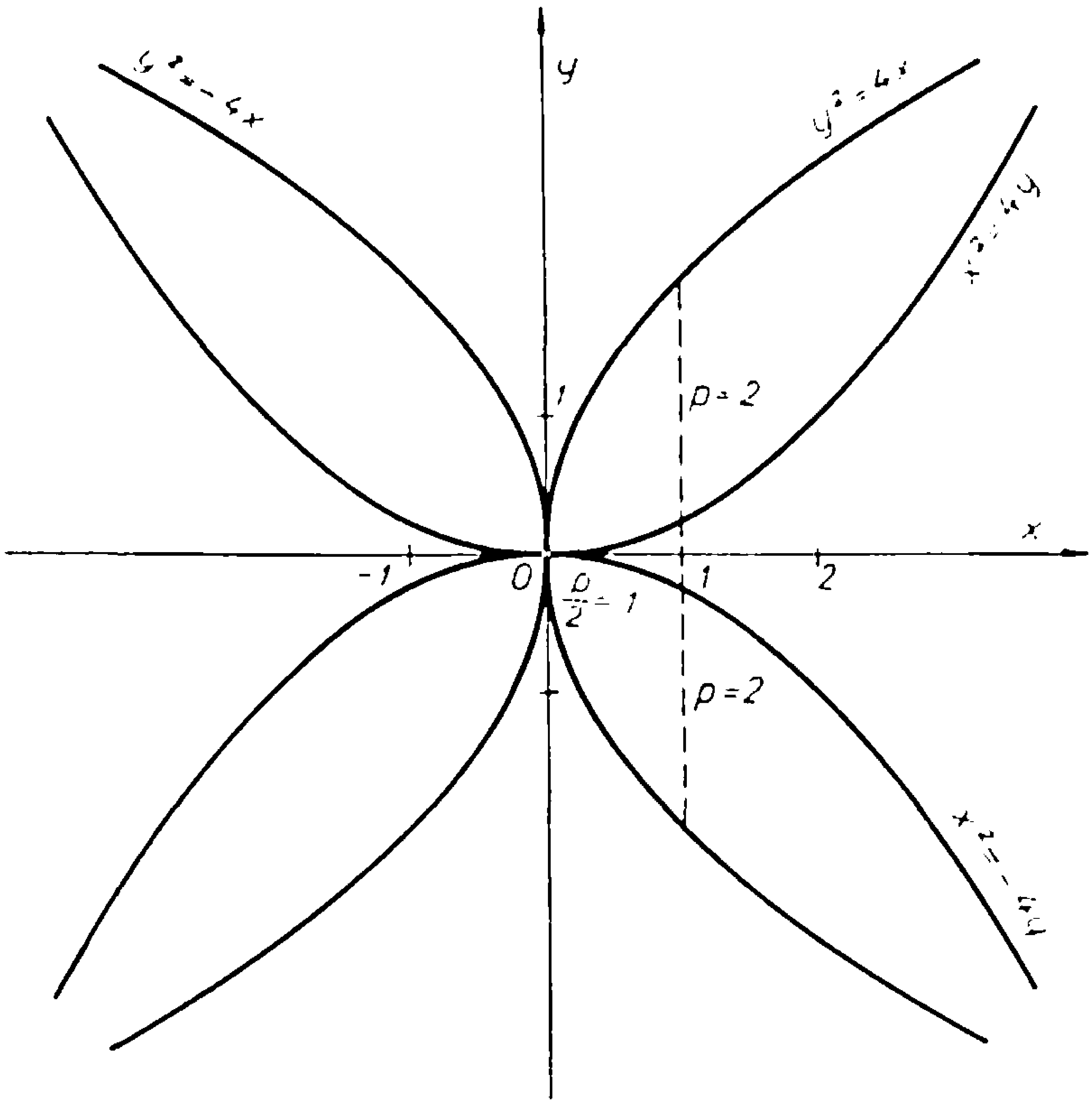
jer za y dobivamo realne vrijednosti, pa dakle i tačke parabole, kad je izraz pod korijenom pozitivan, a to je moguće samo za n e g a t i v n e vrijednosti x.

Zamijenimo li u jednadžbama (76) i (76b) x sa y, a y sa x, dobit ćemo jednadžbe parabola:

1) $x^2 = 2\,p\,y$ ili $y = \dfrac{1}{2\,p}x^2$, koja je otvorena prema gore,

2) $x^2 = -2\,p\,y$ ili $y = -\dfrac{1}{2\,p}x^2$, koja je otvorena prema dolje.

Slika 120 prikazuje sve četiri parabole poluparametra $p = 2$.



Sl. 120

3. PRAVAC I PARABOLA

a) Jednadžbe tangente, normale i polare, povučenih u zadanoj tački parabole

Na način koji je opisan kod kružnice i elipse dobiva se

1) u v j e t n a j e d n a d ž b a:

$$p = 2\,k\,l, \tag{77}$$

kojoj moraju zadovoljavati koeficijent smjera k i odsječak l na osi Y pravca $y = k\,x + l$, da taj pravac bude tangenta parabole $y^2 = 2\,p\,x$, a koordinate dirališta tangente određuju se iz formula:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{l}{k} \\ y_1 &= 2\,l \end{aligned}\right| \tag{77a}$$

2) jednadžba tangente u tački T_1 (x_1, y_1) parabole $y^2 = 2px$:

$$yy_1 = p(x + x_1) \tag{78}$$

ili u eksplicitnom obliku:

$$y = \frac{p}{y_1} x + \frac{p x_1}{y_1}$$

pa je:

$$k = \frac{p}{y_1} \text{ koeficijent smjera te tangente.} \tag{79}$$

3) jednadžba normale u istoj tački T_1 (x_1, y_1) parabole:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1). \tag{80}$$

4) jednadžba polare:

$$yy_0 = p(x + x_0), \tag{81}$$

gdje su x_0 i y_0 koordinate pola P. (Vidi dalje sl. 122.)

b) Konstrukcija tangente u zadanoj tački parabole

Konstrukcija tangente na parabolu u zadanoj tački T_1 krivulje osniva se na njenom svojstvu da je kut, koji zatvaraju u diralištu tangenta i radij-vektor, jednak kutu između radij-vektora i pravca povučenog kroz diralište usporedno s osi X. (Vidi dalje primjer 1 i sl. 121.)

c) Jednadžbe tangenata povučenih iz zadane tačke izvan parabole

Jednadžbe tangenata povučenih iz zadane tačke P (x_0, y_0) možemo opet napisati na dva načina i to pomoću uvjetne jednadžbe ili pomoću jednadžbe polare. (Vidi dalje primjer 2 i sl. 122, na kojoj je također prikazana konstrukcija tih tangenata).

Primjer 1.

Treba napisati jednadžbe tangente i normale povučenih na parabolu $y^2 = 6x$ u tački T_1 apscise $x_1 = 3{,}5$ i ordinate $y_1 > 0$. (Sl. 121)

$$y^2 = 6x; \quad y^2 = 2px; \quad 2p = 6; \quad p = 3; \quad \frac{p}{2} = 1{,}5,$$

$$x_1 = 3{,}5, \text{ dakle } y_{1,2} = \pm\sqrt{6 \cdot x_1} = \pm\sqrt{6 \cdot 3{,}5} = \pm\sqrt{21} = \pm 4{,}58; \; y_1 = +4{,}58.$$

$$T_1 \; (3{,}5\,;\,4{,}58).$$

Prema (78): $4{,}58y = 3(x + 3{,}5)$.

Odatle: $\underline{3x - 4{,}58y + 10{,}5 = 0}$

ili: $\underline{y = 0{,}66x + 2{,}29.}$ — tražene jednadžbe tangente.

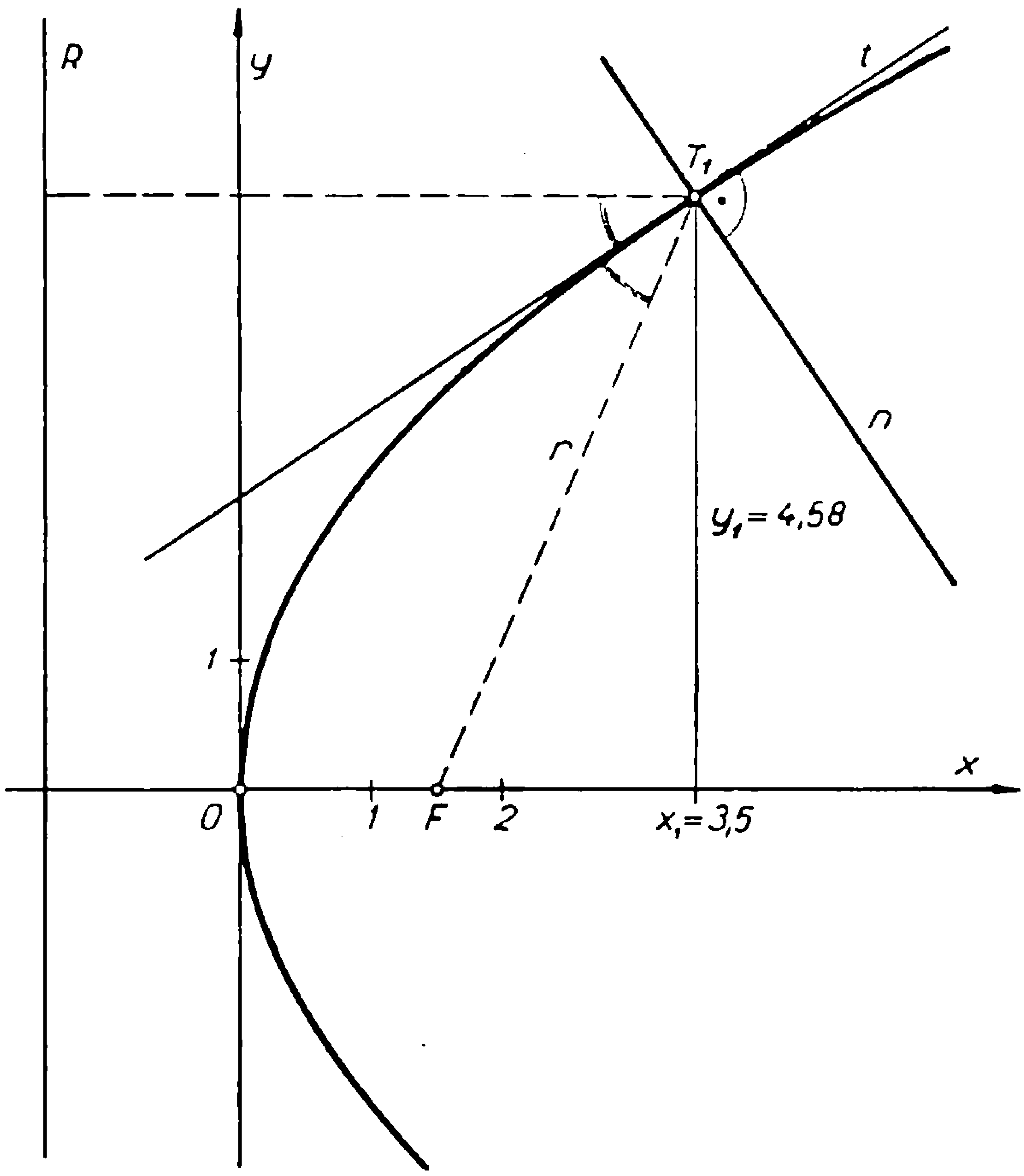
Prema (80):

$$y - 4{,}58 = -\frac{4{,}58}{3}(x - 3{,}5).$$

Odatle: $\underline{4{,}58x + 3y - 29{,}77 = 0}$

ili: $\underline{y = -1{,}53x + 9{,}92.}$ — tražene jednadžbe normale.

(Slika 121 prikazuje grafičko rješenje toga primjera.)



Sl. 121

Primjer 2.

Treba napisati jednadžbe tangenata povučenih na parabolu $y^2 = 5x$ iz tačke $P(-4, 2)$ i odrediti koordinate dirališta tih tangenata (sl. 122).

$$y^2 = 5x; \quad y^2 = 2px; \quad p = \frac{5}{2}.$$

1. način.

Tangenta $y = kx + l$ prolazi tačkom P, dakle:

$$2 = -4k + l,$$

a prema (77):

$$\frac{5}{2} = 2kl.$$

Iz toga sustava računamo k i l.

Iz 1. jednadžbe slijedi:

$$l = 2 + 4k, \tag{a}$$

a uvrštenje u 2. jednadžbu daje:

$$\frac{5}{2} = 2k(2 + 4k)$$

ili: $$k^2 + \frac{1}{2}k - \frac{5}{16} = 0.$$

odatle:

$$k_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{5}{16}}$$

ili: $$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{4}.$$

Odatle:

$$k_1 = 0{,}3624 \doteq 0{,}36, \quad k_2 = -0{,}8624 \doteq -0{,}86$$

Prema (a):

$$l_1 = 3{,}4496 \doteq 3{,}45 \quad l_2 = -1{,}4496 \doteq -1{,}45.$$

Uvrštenje u $y = kx + l$ daje:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{y = 0{,}36x + 3{,}45} \\ \underline{y = -0{,}86x - 1{,}45.} \end{array}\right| \quad \text{tražene jednadžbe tangenata.}$$

Koordinate dirališta $T_1\,(x_1, y_1)$ i $T_2\,(x_2, y_2)$ tangenata dobivamo pomoću formula (77a):

za tangentu t_1: $$x_1 = \frac{3{,}4496}{0{,}3624} \doteq 9{,}52$$

$$y_1 = 2 \cdot 3{,}4496 \doteq 6{,}90;$$

za tangentu t_2: $$x_2 = \frac{-1{,}4496}{-0{,}8624} \doteq 1{,}68$$

$$y_2 = -2 \cdot 1{,}4496 \doteq -2{,}90.$$

Dirališta tangenata:

$$\underline{T_1\,(9{,}52;\ 6{,}90)}$$

$$\underline{T_2\,(1{,}68;\ -2{,}90).}$$

(Vidi sl. 122 na kojoj je taj primjer prikazan grafički.)

2. način.

Prema (76) i (81) dobivamo dvije jednadžbe za određivanje koordinata dirališta tangenata:

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 5x \\ 2y = \dfrac{5}{2}(x - 4) \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 5x \\ 4y = 5x - 20. \end{array}\right| \tag{a}$$

Uvrštenje prve jednadžbe u drugu daje:

$$y^2 - 4y - 20 = 0.$$

odatle:

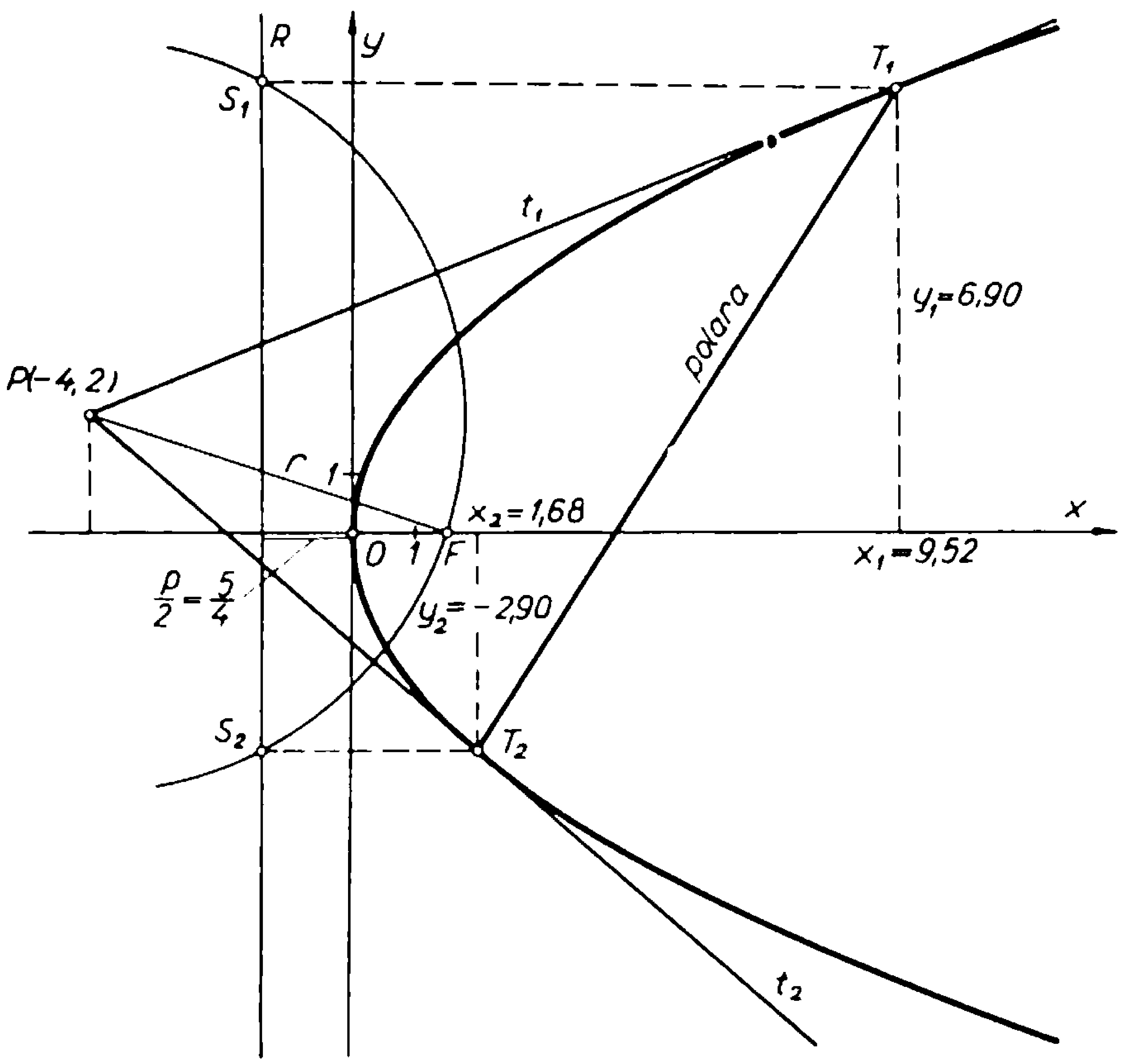
$$y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 20}$$

ili: $$y_{1,2} = 2 \pm 4{,}90$$

ili: $$y_1 = 6{,}90; \quad y_2 = -2{,}90.$$

a prema (a): $$x_1 = 9{,}52; \quad x_2 = 1{,}68$$

Dakle su dirališta tangenata $\underline{T_1\,(9{,}52;\ 6{,}90)}$ i $\underline{T_2\,(1{,}68;\ -2{,}90)}$.



Sl. 122

Uvrštenje koordinata dirališta i $p = \dfrac{5}{2}$ u formulu (78) daje tražene jednadžbe tangenata:

$$6{,}90y = \frac{5}{2}\,(x + 9{,}52)$$

$$-2{,}90y = \frac{5}{2}\,(x + 1{,}68)$$

ili:

$$\underline{y = 0{,}36x + 3{,}45}$$

$$\underline{y = -8{,}86x - 1{,}45}$$

(Vidi sl. 122.)

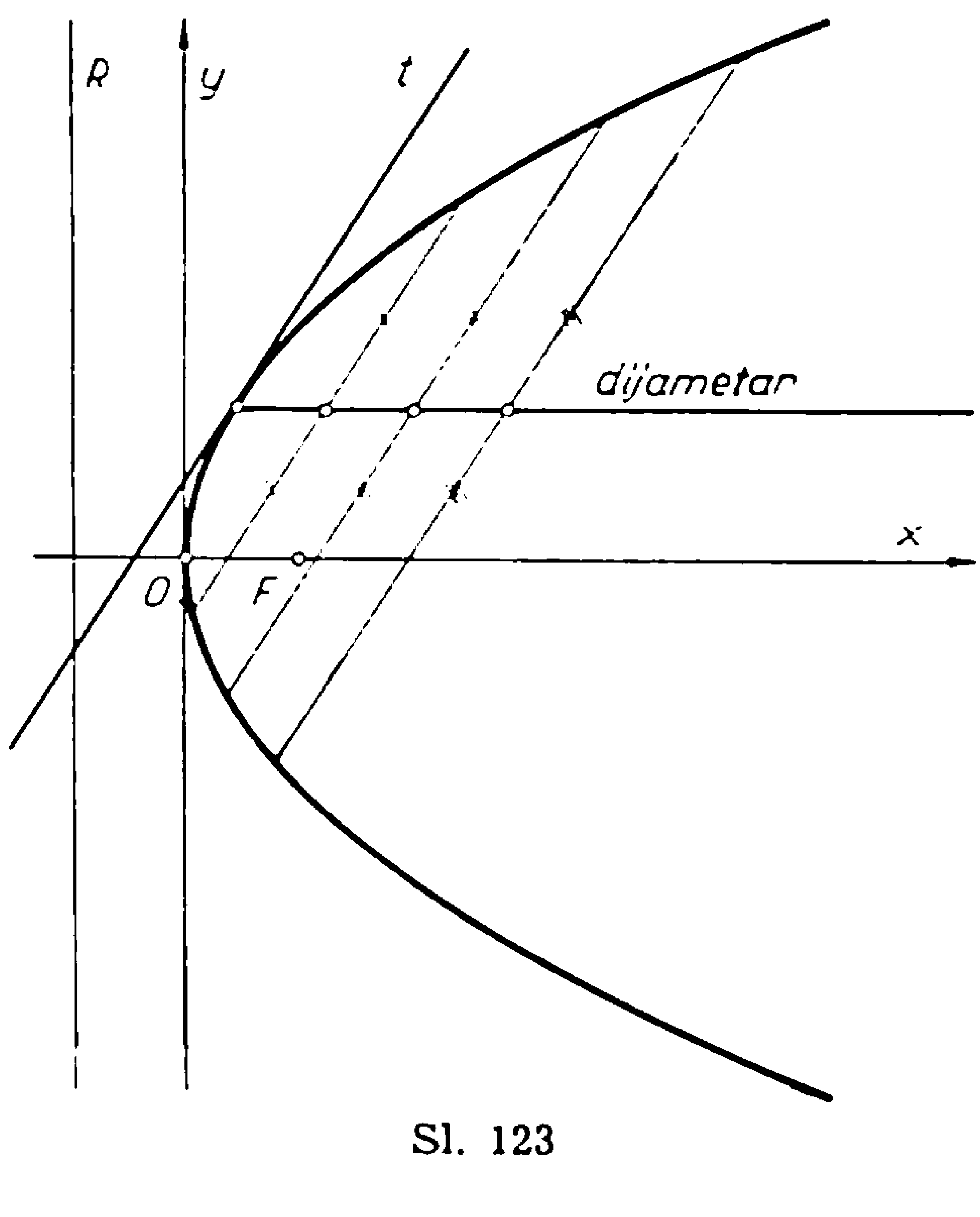
d) Konstrukcija tangenata povučenih iz tačke izvan parabole

Slika 122, na kojoj je primjer 2. riješen grafički, prikazuje tu konstrukciju.

Luk kružnice koja je opisana iz P, a ide žarištem F, siječe ravnalicu R parabole u suprotištima S_1 i S_2. Pravci kroz S_1 i S_2 usporedni s osi X sijeku parabolu u diralištima T_1 i T_2 traženih tangenata.

e) Dijametri parabole. Konstrukcija parabole kojoj su zadani dijametar i jedna polara

Iz jednadžbe polare (81): $yy_0 = p\,(x + x_0)$ vidimo da njen koeficijent smjera $k = \frac{p}{y_0}$ ne ovisi o apscisi pola x_0, već samo o ordinati y_0. Iz toga slijedi da polovima, koji leže na pravcu usporednom s osi parabole, odgovaraju usporedne polare. Taj pravac zove se d i j a m e t a r parabole (sl. 123). Dijametar raspolavlja tetive parabole koje su povučene usporedno s tangentom, odnosno polarom.



Sl. 123

Sl. 124 prikazuje k o n s t r u k c i j u p a r a b o l e k o j o j s u z a d a n i d i j a m e t a r i j e d n a p o l a r a.

f) Konstrukcija parabole pomoću tangenata

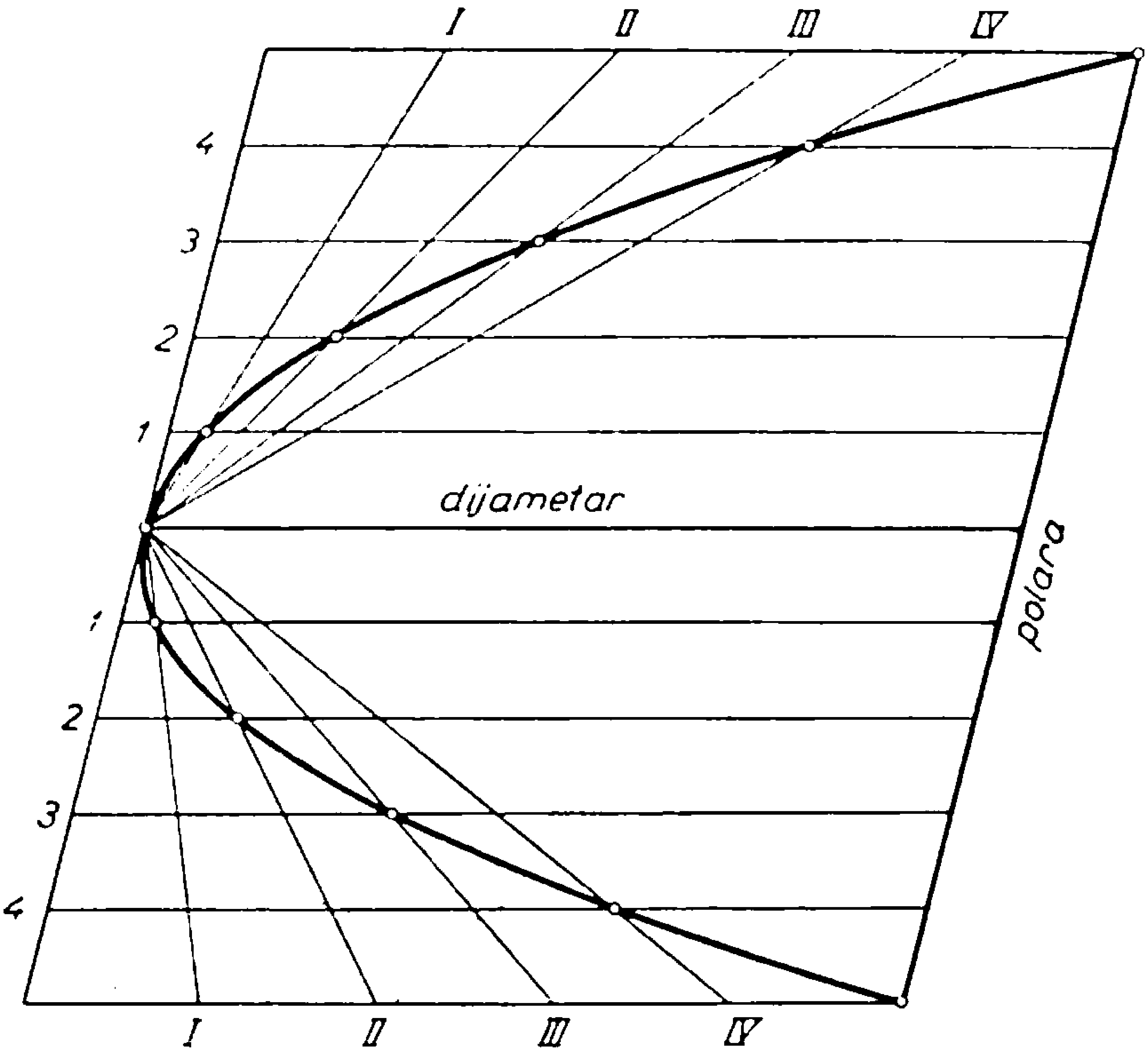
Sl. 125 prikazuje najjednostavniji način konstrukcije parabole.

Istodobno s određivanjem tačaka parabole na način koji je opisan u 1. poglavlju ovog §-a, određuju se sjecišta tangenata s osi parabole, pa dakle i tangente na parabolu, a usput se dobivaju i sjecišta normale s tom osi.

g) Ploština parabole

Prema sl. 119:

$$P = \frac{2}{3} x \cdot 2y = \frac{4}{3} xy.$$



Sl. 124

4. POPIS FORMULA I UPUTE ZA RJEŠAVANJE ZADATAKA U VEZI S PARABOLOM

Zadana parabola ima vrh u ishodištu (0, 0), te njena jednadžba glasi:

$$y^2 = 2px.$$

A. Zadano je dirالište $T_1 (x_1, y_1)$ tangente.

1. Jednadžba tangente:

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

2. Jednadžba normale:

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1),$$

gdje je k koeficijent smjera tangente, uzet iz jednadžbe tangente izračunate prema 1.

B. Diralište tangente nije zadano.

1. Jednadžba tangente: $y = kx + l.$

   Nepoznanice k i l određuju se

   1) iz uvjetne jedandžbe: $p = 2kl$ i

   2) iz još jedne jednadžbe, koju treba napisati prema onome što je u zadatku zadano.

2. Koordinate dirališta (x_1, y_1) tangente mogu se odrediti na dva načina:

   1) pomoću formula:

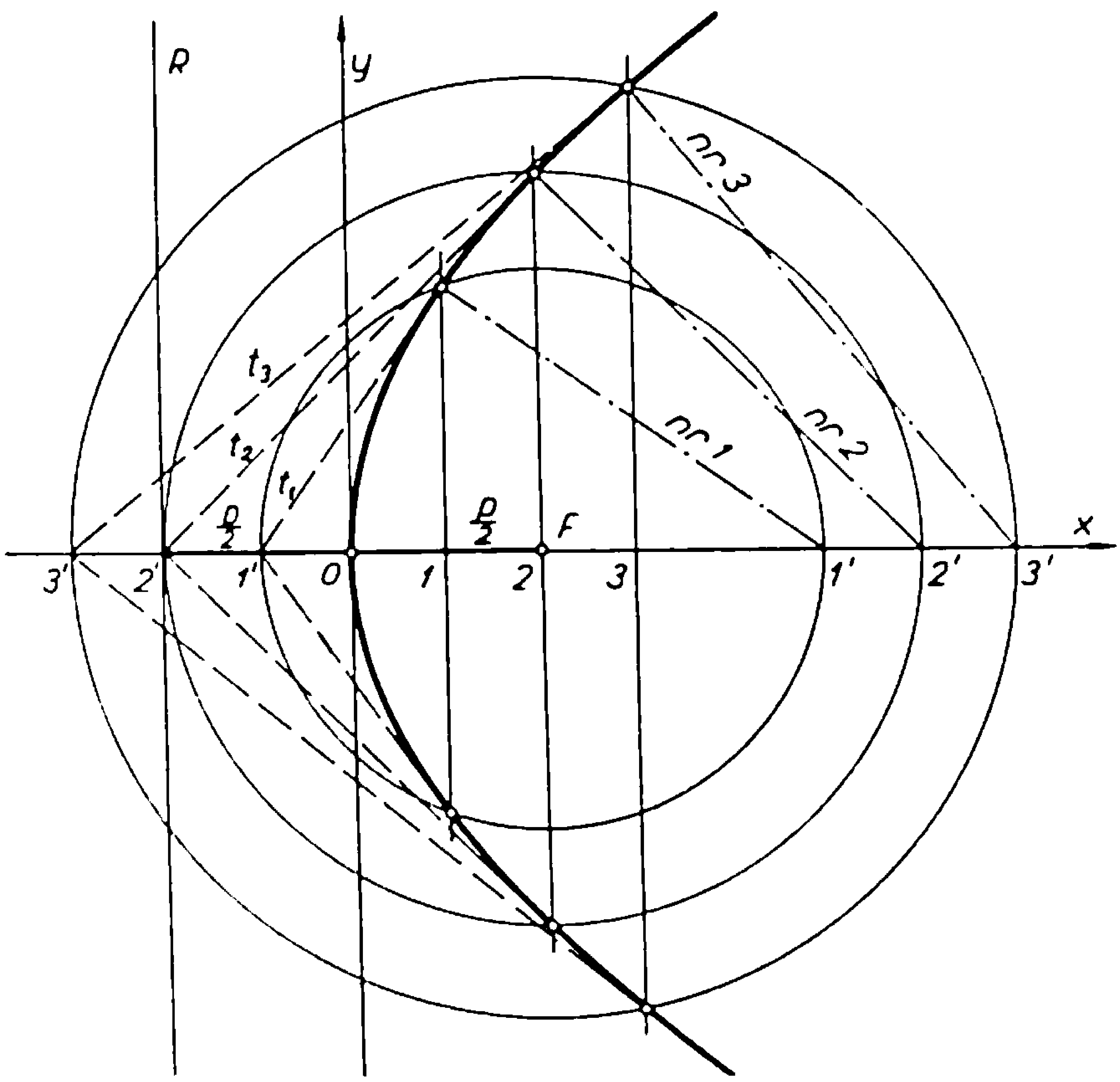
$$x_1 = \frac{l}{k}$$

$$y_1 = 2l$$

   u koje se za k i l uvrste vrijednosti izračunate prema 1.

   2) riješe se zajedno jednadžba zadane parabole i jednadžba tangente izračunate prema 1.

   Kontrola računa: diskriminanta $D = 0$.



Sl. 125

3. Jednadžba normale u diralištu (x_1, y_1):

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1),$$

gdje je k koeficijent smjera tangente, uzet iz jednadžbe izračunate prema 1.

C. Jednadžba polare

$$yy_0 = p(x + x_0),$$

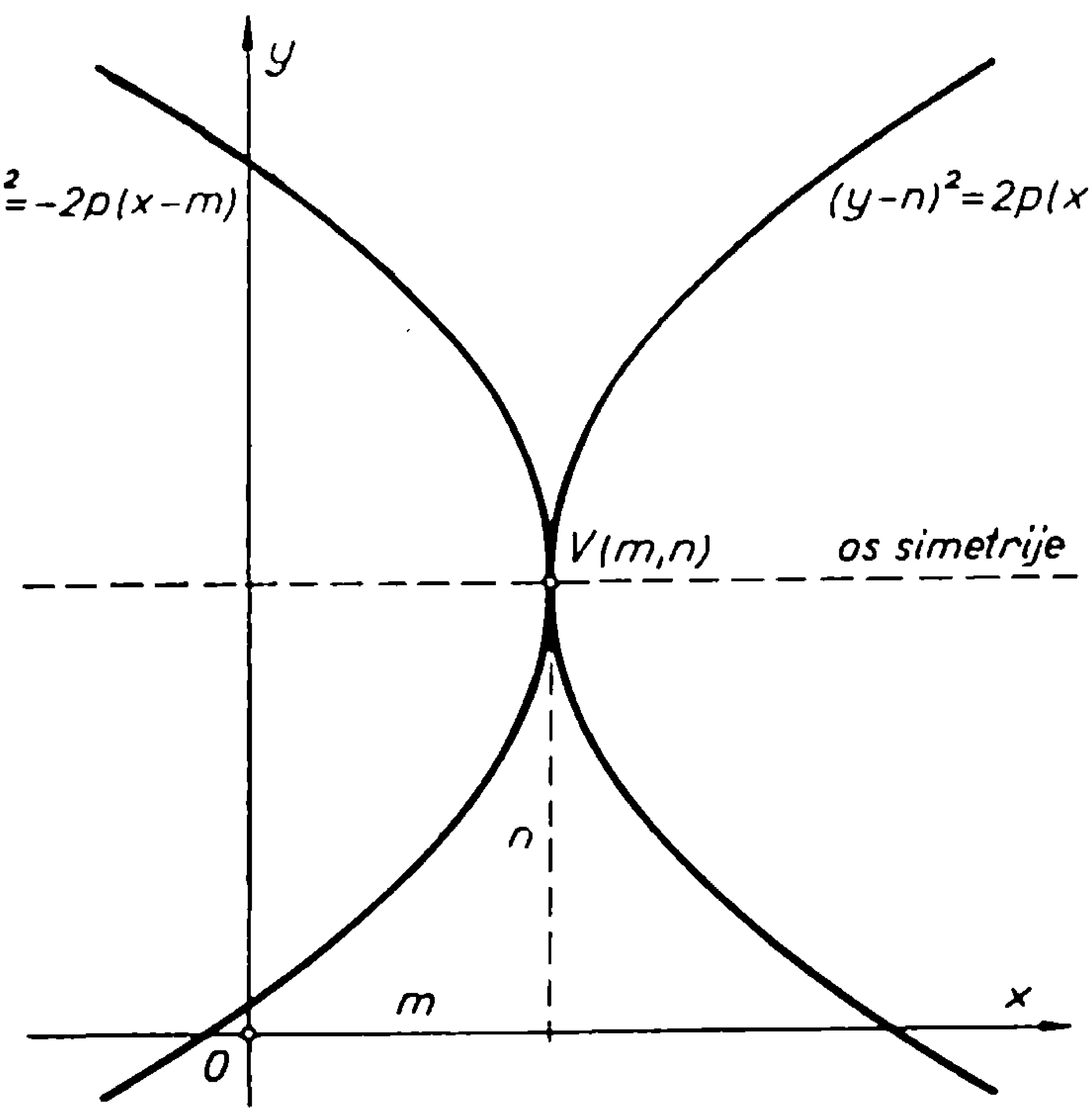
gdje su x_0 i y_0 koordinate pola.

Riješi li se sustav od jednadžbe polare i jednadžbe parabole, dobiju se koordinate dirališta tangenata iz pola P. Dalje se postupa kako je pokazano pod A, pa se i na taj način mogu odrediti jednadžbe tangenata na parabolu iz zadane tačke P izvan parabole.

Već smo spomenuli:

1) da je parabola $y^2 = 2px$, kojoj je os simetrije os X, otvorena prema desno, dok je parabola $y^2 = -2px$ otvorena prema lijevo,

2) da je parabola $x^2 = 2py$, kojoj je os simetrije os Y, otvorena prema gore, dok je parabola $x^2 = -2py$ otvorena prema dolje. Vidi sl. 120, na kojoj su prikazane parabole $y^2 = 4x$ i $y^2 = -4x$, a također parabole $x^2 = 4y$ i $x^2 = -4y$.



Sl. 126

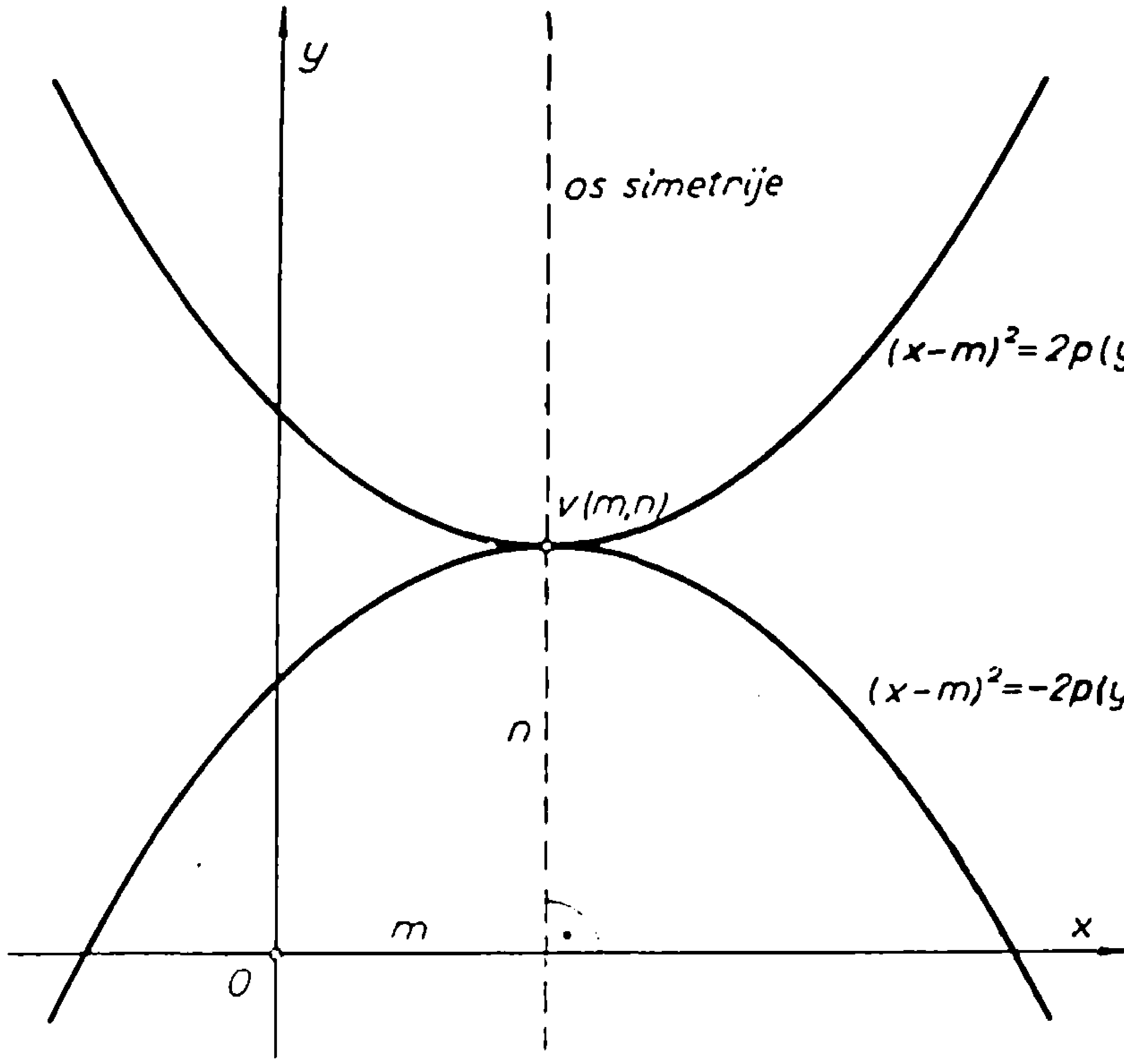
Izvršimo li translaciju parabola $y^2 = 2px$ i $y^2 = -2px$, odnosno parabola $x^2 = 2py$ i $x^2 = -2py$, za dužinu m duž osi X i za dužinu n duž osi Y, glasit će jednadžbe tih parabola s obzirom na formule 5a):

$$(y - n)^2 = 2p(x - m) \quad \text{i} \quad (y - n)^2 = -2p(x - m) \tag{a}$$

odnosno:

$$(x - m)^2 = 2p\,(y - n) \quad \text{i} \quad (x - m)^2 = -2p\,(y - n) \quad \text{(b)}$$

Vidi sl. 126 i 127.



Sl. 127

Prikažemo li jednadžbe parabola $(y - n)^2 = 2p\,(x - m)$ i $(x - m)^2 = 2p\,(y - n)$

u obliku: $\quad y^2 - 2ny - 2px + (n^2 + 2pm) = 0$

odnosno: $\quad x^2 - 2mx - 2py + (m^2 + 2pn) = 0$

i označimo li koeficijente od x s $2D$, koeficijente od y s $2E$, a slobodne članove s F, glasit će jednadžbe parabola:

$$y^2 + 2Ey + 2Dx + F = 0 \qquad \text{(c)}$$

odnosno:

$$x^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad \text{(d)}$$

U jednadžbu (c) ne ulazi član sa x^2, pa je možemo prikazati u obliku (a), dok u jednadžbu (d) ne ulazi član sa y^2, pa je možemo prikazati u obliku (b). Iz toga slijedi: jednadžba (c) predočuje parabolu kojoj je os simetrije usporedna s osi X, a otvorena je prema desno, odnosno prema lijevo, dok jednadžba (d) predočuje parabolu kojoj je os simetrije okomita na os X, a otvorena je prema gore, odnosno prema dolje.

Primjeri:

1. Konstruiraj parabolu

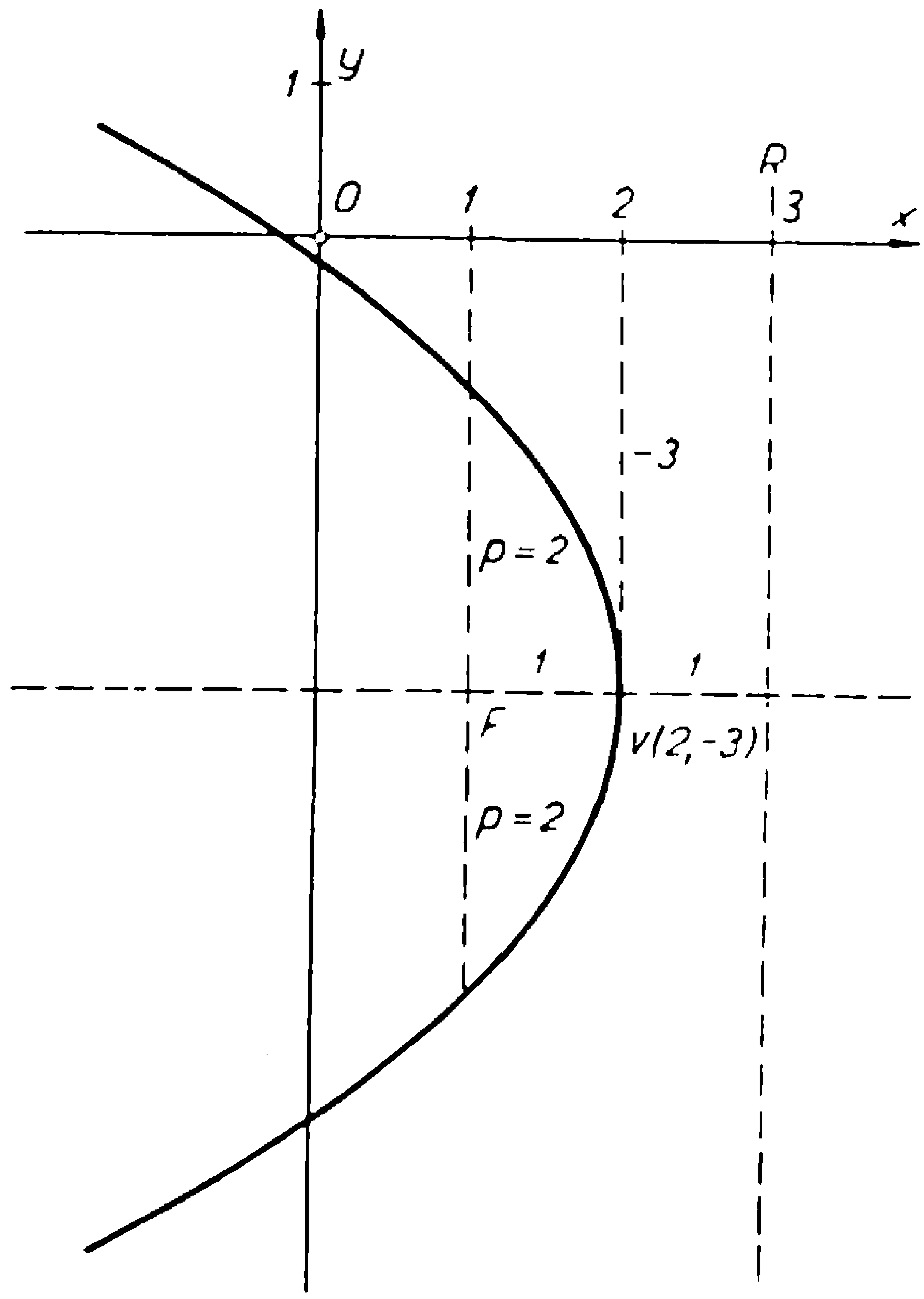
$$y^2 + 6y + 4x + 1 = 0$$

$$(y^2 + 6y + 9) = -4x - 1 + 9$$

$$(y + 3)^2 = -4(x - 2)$$

$$V(2, -3); \quad 2p = 4; \quad p = 2; \quad \frac{p}{2} = 1.$$

Vidi sl. 128.



Sl. 128

2. Konstruiraj parabolu

$$x^2 + 2x - 6y + 13 = 0$$

$$(x^2 + 2x + 1) = 6y - 13 + 1$$

$$(x + 1)^2 = 6(y - 2)$$

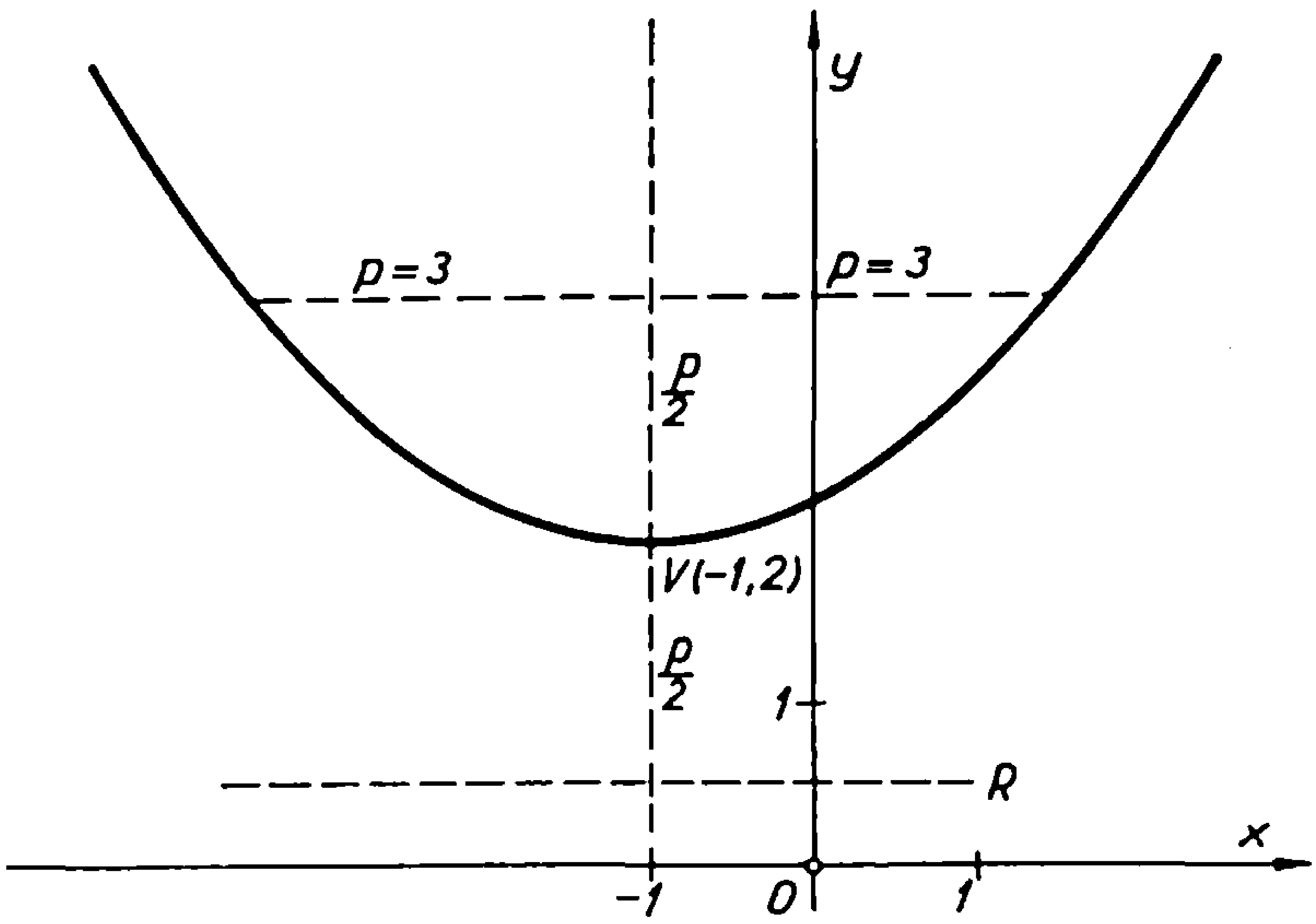
$$V(-1, 2); \quad 2p = 6; \quad p = 3; \quad \frac{p}{2} = 1{,}5.$$

Vidi sl. 129.

3. Odredi jednadžbu parabole kojoj je vrh $V(-2, -3)$, a prolazi tačkama $A(0, -4)$ i $B(-4, -4)$, pa je konstruiraj.

Iz koordinata zadanih tačaka parabole slijedi da je os parabole okomita na os X, pa jednadžba parabole glasi:

$$(x + 2)^2 = 2p(y + 3)$$



Sl. 129

Da bismo odredili $2p$, uvrstimo koordinate tačke $A\ (0, -4)$ ili $B\ (-4, -4)$ u gornju jednadžbu. Dobivamo:

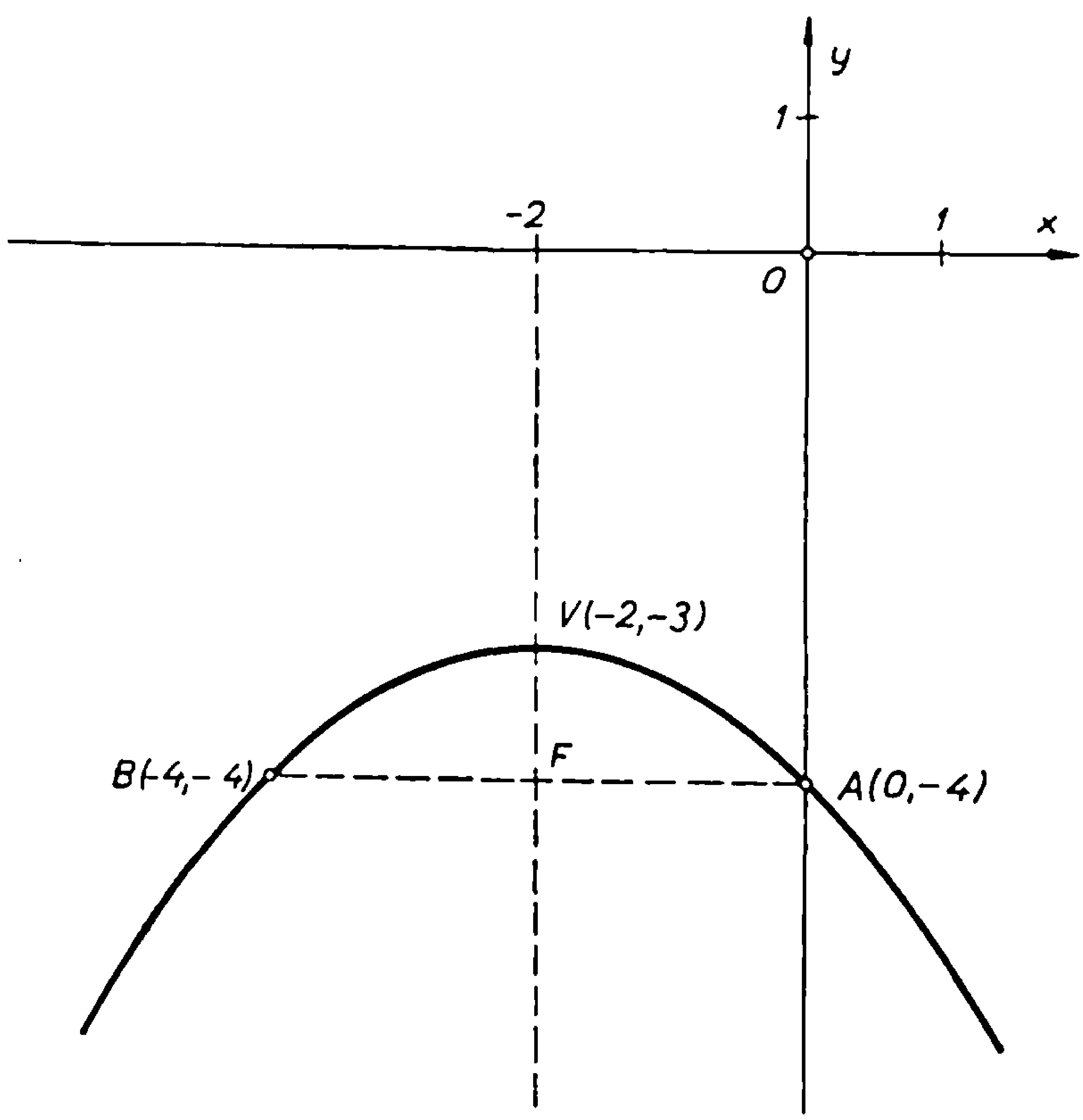
$$(0 + 2)^2 = 2p\,(-4 + 3)$$

odatle je:

$$2p = -4$$

pa jednadžba zadane parabole glasi: $(x + 2)^2 = -4\,(y + 3)$

Slika 130 prikazuje tu parabolu.

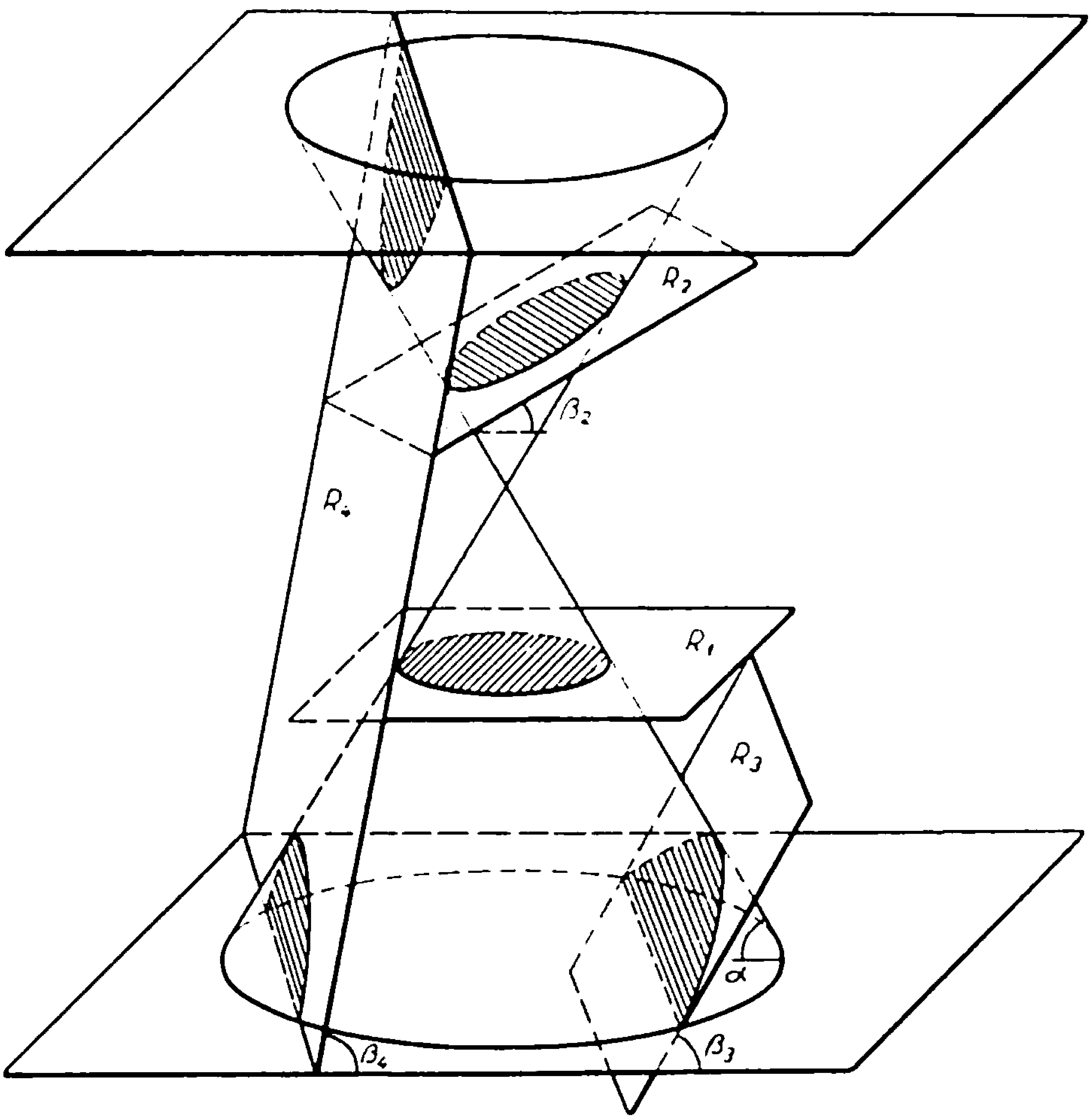


Sl. 130

§ 12. OPĆENITO O KRIVULJAMA DRUGOG REDA ILI PRESJECIMA STOŠCA

1. PRESJECI STOŠCA

Siječemo li plašt stošca ravninama R, koje ne prolaze vrhom stošca, nastaju presječne krivulje i to (vidi sl. 131):



Sl. 131

1) k r u ž n i c a ili e l i p s a, ako ravnina siječe sve izvodnice stošca. U slučaju kružnice ravnina R_1 je usporedna s osnovkama stošca,

jer je njezin prikloni kut $\beta_1 = 0$. U slučaju elipse ravnina R_2 ima prikloni kut β_2, koji je manji od priklonog kuta α izvodnica stošca.

2) p a r a b o l a, ako je ravnina R_3 usporedna s jednom izvodnicom stočca. Tada je $\beta_3 = \alpha$.

3) h i p e r b o l a, ako je ravnina R_4 usporedna sa dvije izvodnice stošca. Tada je $\beta_4 > \alpha$.

2. OPĆA JEDNADŽBA PRESJEKA STOŠCA U PRAVOKUTNIM KOORDINATAMA

Ta jednadžba glasi:

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0. \tag{82}$$

Znamo već da ta jednadžba predočuje:

1) k r u ž n i c u u općem položaju, ako je $A = 1$, $C = 1$ i $B = 0$ (vidi jednadžbu 28) ili ako je $A = C$ i $B = 0$; osim toga mora biti $D^2 + E^2 > F$ nakon transformiranja jednadžbe u oblik (28);

2) e l i p s u ili h i p e r b o l u, koja je translacijom prenesena iz središnjeg položaja, ako je $B = 0$, tj. ako u jednadžbi (82) nema člana s xy, pri čemu je za elipsu potrebno da su koeficijenti A i C istog predznaka (vidi jednadžbu 48), a za hiperbolu protivnog.

Sadrži li prema tome jednadžba oblika (82) i član sa xy, ona predočuje elipsu, parabolu ili hiperbolu u općem položaju (tj. uz translaciju krivulje izvršena je i rotacija) i to:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{elipsu, ako je} & AC - B^2 > 0 \\ \text{hiperbolu, ako je} & AC - B^2 < 0 \\ \text{parabolu, ako je} & AC - B^2 = 0. \end{array}\right| \tag{83}$$

Jednadžbe krivulja kojima je središte u ishodištu, nemaju linearnih članova, tj. članova sa x i y. [Vidi jednadžbe (25), (45) i (63)].

3. REDUKCIJA OPĆE JEDNADŽBE KRIVULJA DRUGOG REDA

Redukcija se sastoji u tome da se translacijom i okretanjem koordinatnog sustava zadana opća jednadžba:

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0$$

svede na najjednostavniji oblik, u kojem se osi simetrije krivulje podudaraju s koordinatnim osima, tj. na središnji, a za parabolu na vršni oblik.

a) Postupak za elipsu i hiperbolu (Vidi sl. 132)

1) određuju se koordinate x_0, y_0 središta S krivulje:

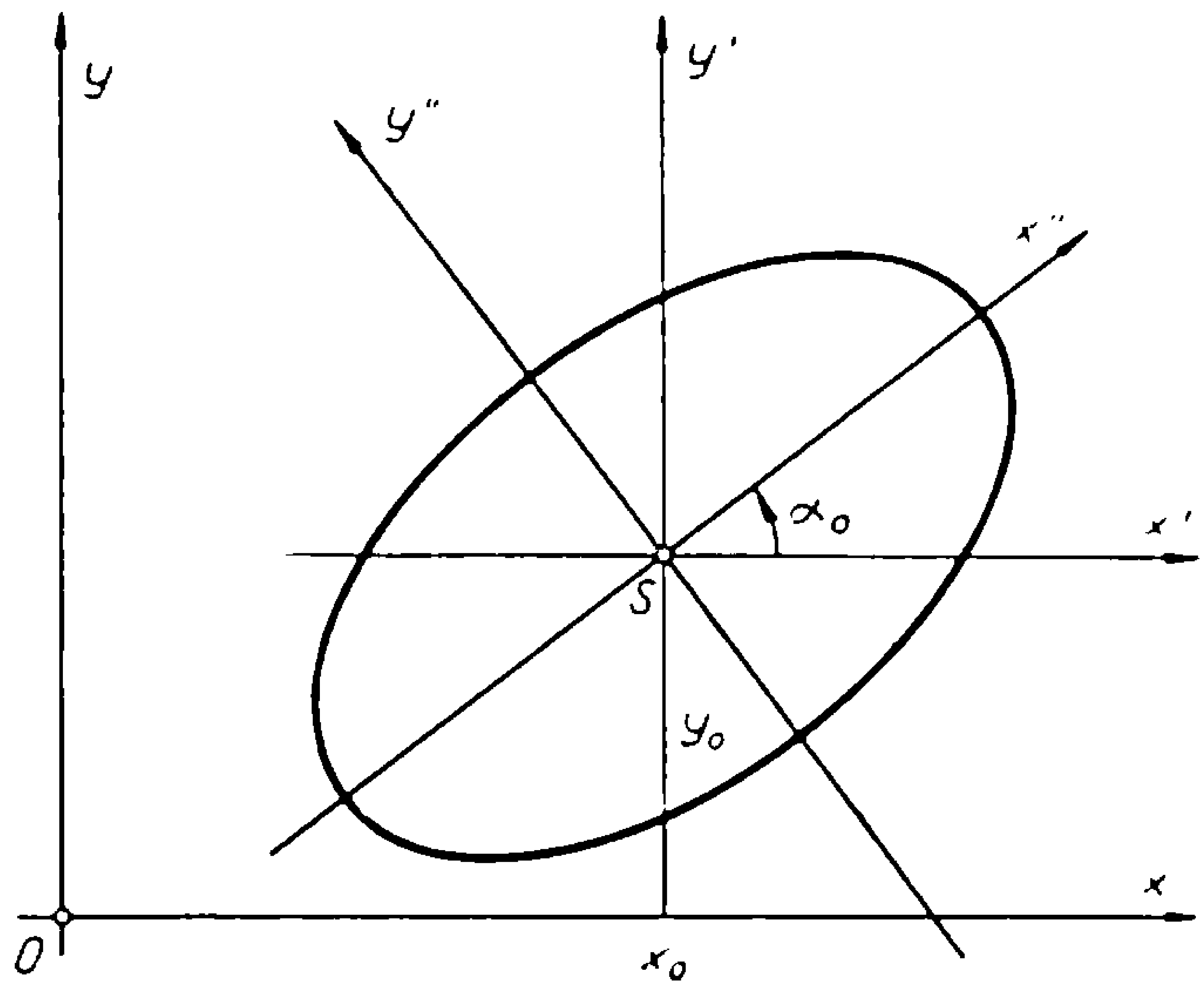
$$x_0 = \frac{BE - CD}{AC - B^2}$$
$$y_0 = \frac{BD - AE}{AC - B^2} \qquad (84)$$

2. Translacijom prenosi se koordinatni sustav XOY u položaj $X'SY'$ da se uklone linearni članovi.

S obzirom na taj novi sustav $X'SY'$ jednadžba krivulje prima oblik:

$$Ax'^2 + 2\,Bx'y' + Cy'^2 + G = 0,$$

gdje je: $G = Ax_0^2 + 2\,Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2\,Dx_0 + 2\,Ey_0 + F. \qquad (85)$



Sl. 132

3) Izračuna se šiljati kut α, koji zatvara s osi X' jedna od osi simetrije krivulje i to prema formuli:

$$\operatorname{tg} 2\,\alpha = \frac{2\,B}{A-C}. \qquad (86)$$

4) Koordinatni sustav $X'SY'$ okrene se za taj šiljati kut α u položaj $X''SY''$ da se ukloni član s xy, pa se dobije središnji oblik jednadžbe zadane krivulje:

$$A'x''^2 + C'y''^2 + G = 0;$$

gdje je: $A' = A \cdot \cos^2 \alpha + B \cdot \sin 2\,\alpha + C \cdot \sin^2 \alpha$

$C' = A \cdot \sin^2 \alpha - B \cdot \sin 2\,\alpha + C \cdot \cos^2 \alpha \qquad (87)$

G vidi (85).

Time je redukcija jednadžbe krivulje drugog reda dovršena, te se krivulja može lako konstruirati.

P r i m j e d b a: Položaj velike osi elipse ili glavne osi hiperbole s obzirom na koordinatni sustav $X'SY'$, može se unaprijed odrediti tako da se prema formuli:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{C - A \mp \sqrt{(C-A)^2 + 4B^2}}{2B} \tag{88}$$

izračuna kut α_1 koji velika, odnosno glavna os krivulje, zatvara s osi X' ili X, pri čemu se u toj formuli ispred drugog korijena uzima:

α) za elipsu: gornji predznak, ako je u (85) G negativan, odnosno donji predznak, ako je G pozitivan,

β) za hiperbolu obratno, tj. gornji predznak za $G > 0$,

donji predznak za $G < 0$.

Na taj način može se također ispitati da li je krivulja narisana u pravilnom položaju.

b) Postupak za parabolu (Vidi sl. 133)

1) Izračuna se kut α, koji zatvara s + osi X os parabole:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{B}{C} = -\frac{A}{B} \tag{89}$$

(za $\operatorname{tg} \alpha > 0$, α se uzima u prvom, a za $\operatorname{tg} \alpha < 0$ u drugom kvadrantu).

2) Koordinatni sustav XOY okreće se za taj kut α u položaj $X'OY'$.

S obzirom na taj koordinatni sustav $X'OY'$ jednadžba parabole glasi:

$$\left.\begin{aligned} & C' y'^2 + 2D' x' + 2E' y' + F = 0, \\ \text{gdje su:}\quad & C' = A + C \\ & D' = D \cdot \cos\alpha + E \cdot \sin\alpha \\ & E' = E \cdot \cos\alpha - D \cdot \sin\alpha. \end{aligned}\right| \tag{90}$$

3) Izračunavaju se s obzirom na koordinatni sustav $X'OY'$ koordinate x'_0 i y'_0 vrha V parabole:

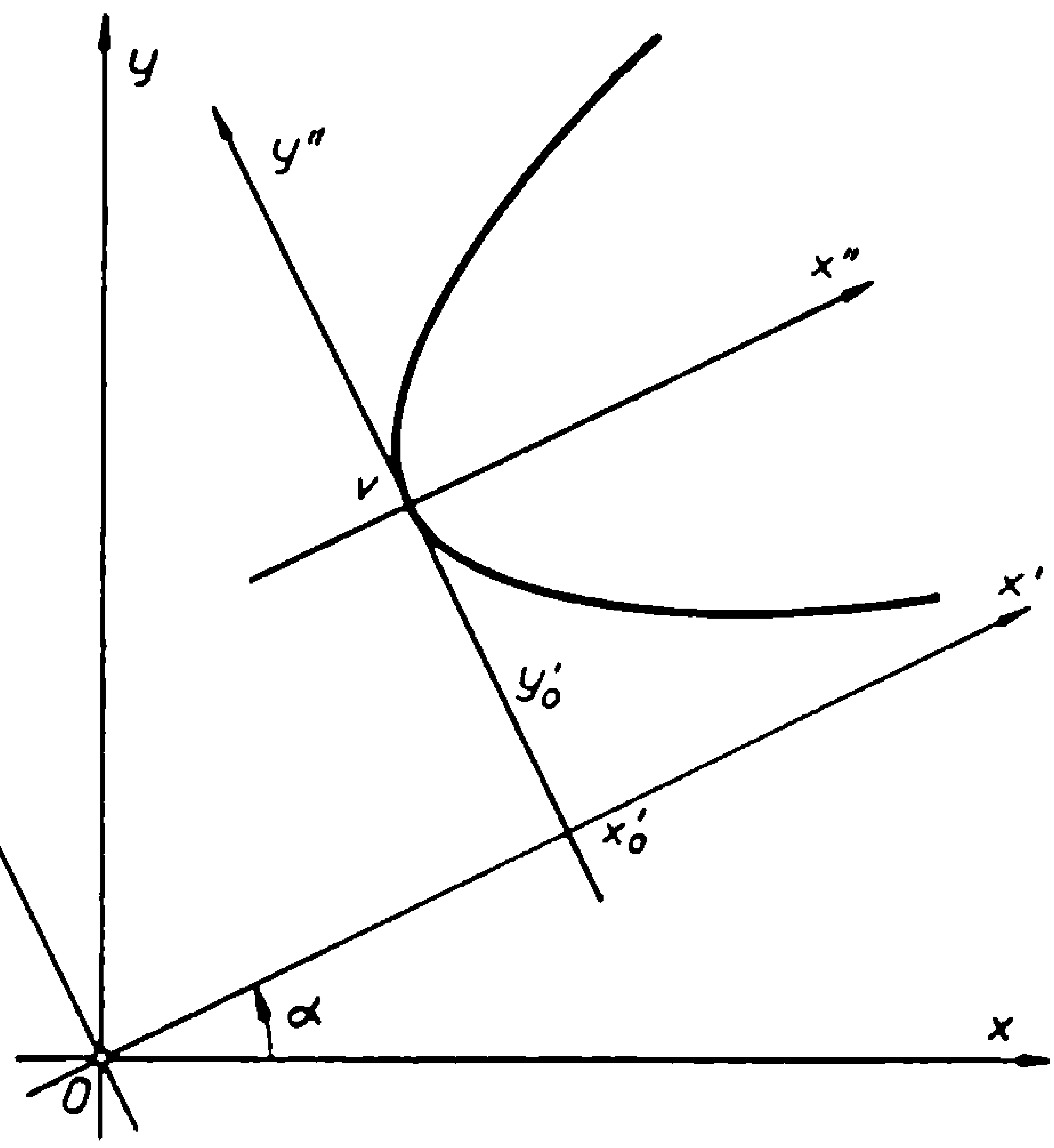
$$\left.\begin{aligned} x'_0 &= \frac{E'^2 - C'F}{2C'D'} \\ y'_0 &= -\frac{E'}{C'}. \end{aligned}\right| \tag{91}$$

4) Koordinatni sustav $X'OY'$ prenosi se translacijom u položaj $X''VY''$, pa jednadžba parabole prima vršni oblik:

$$y''^2 = -\frac{2D'}{C'}x''. \tag{92}$$

Prema tome je parametar parabole:

$$2p = -\frac{2D'}{C'} \tag{92a}$$



Sl. 133

Primjer 1.

Treba provesti redukciju jednadžbe:

$$4x^2 - 5xy + 2y^2 + 2x - 5y + 3 = 0$$

i narisati krivulju zadanu tom jednadžbom (sl. 134)!

Prema:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad \text{imamo:}$$

$$A = 4;\ \ B = -\frac{5}{2};\ \ C = 2;\ \ D = 1;\ \ E = -\frac{5}{2};\ \ F = 3.$$

$$AC - B^2 = 8 - \frac{25}{4} = \frac{32}{4} - \frac{25}{4} = \frac{7}{4} > 0 \ldots \text{ elipsa prema (83).}$$

1) Prema (84) koordinate središta S krivulje:

$$x_0 = \frac{\frac{25}{4} - 2}{\frac{7}{4}} = + \frac{17}{7} = 2{,}43$$

$$S\ (2{,}43; \quad 4{,}29)$$

$$y_0 = \frac{-\frac{5}{2} + 10}{\frac{7}{4}} = + \frac{30}{7} = 4{,}29.$$

2) Prema (85):

$$G = 4 \cdot 5{,}90 - 5 \cdot 10{,}42 + 2 \cdot 18{,}40 + 2 \cdot 2{,}43 - 5 \cdot 4{,}29 + 3$$

$$G = -5{,}32$$

$$4\,x'^2 - 5\,x'\,y' + 2\,y'^2 - 5{,}32 = 0.$$

To je jednadžba elipse s obzirom na koordinatni sustav $X'SY'$.

Prema (86):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-5}{4-2} = -2{,}50.$$

$$(2\alpha)_0 = 68^0\,10'$$

$$2\,\alpha = 180^0 - 68^0\,10' = 111^0\,50'$$

$$\alpha = 55^0\,55'.$$

4) Prema (87):

$$\sin\alpha = 0{,}83; \qquad \sin^2\alpha = 0{,}69$$

$$\cos\alpha = 0{,}56; \qquad \cos^2\alpha = 0{,}31$$

$$\sin 2\,\alpha = \sin 111^0\,50' = \cos 21^0\,50' = 0{,}93.$$

$$A' = 4 \cdot 0{,}31 - 2{,}5 \cdot 0{,}93 + 2 \cdot 0{,}69 = +\,0{,}30$$

$$C' = 4 \cdot 0{,}69 + 2{,}5 \cdot 0{,}93 + 2 \cdot 0{,}31 = +\,5{,}70$$

$$G = -5{,}32 \text{ (vidi gore).}$$

$$0{,}30\,x''^2 + 5{,}70\,y''^2 - 5{,}32 = 0\ /\ :5{,}32$$

$$\frac{x''^2}{\frac{5{,}32}{0{,}30}} + \frac{y''^2}{\frac{5{,}32}{5{,}70}} = 1,$$

ili:

$$\underline{\frac{x''^2}{17{,}73} + \frac{y''^2}{0{,}93} = 1.}$$

To je tražena središnja jednadžba elipse s obzirom na kordinatni sustav $X''SY''$.

Odatle:

velika poluos elipse $a = \sqrt{17{,}73} = 4{,}21$

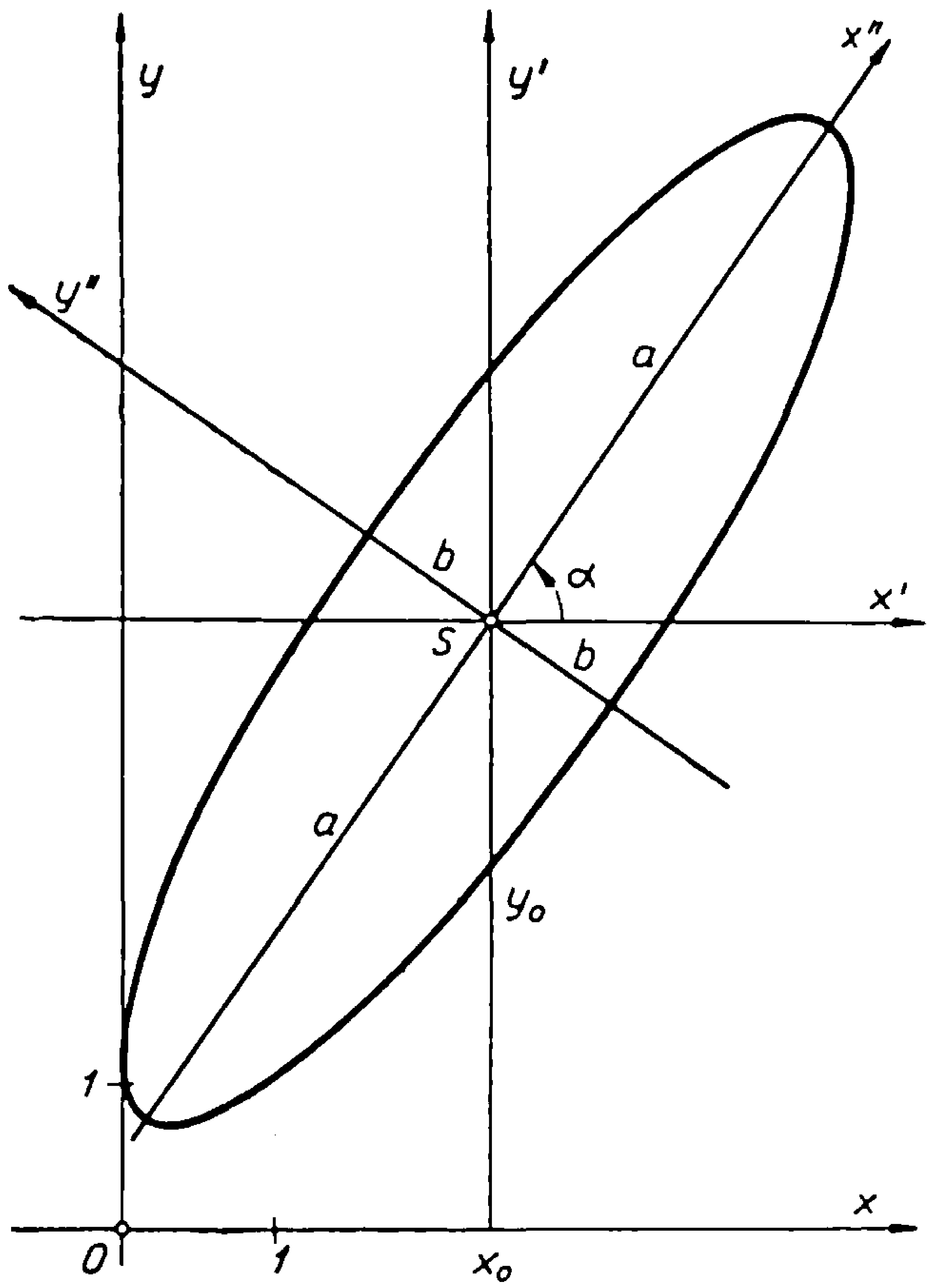
mala poluos elipse $b = \sqrt{0{,}93} = 0{,}96.$

Pokus: Prema (88):

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{-2 - \sqrt{4 + 25}}{-5} = +1{,}477$$

(uzet je predznak —, jer je $G < 0$).
$\alpha_1 = 55^0\,55'$ je kut koji velika os elipse zatvara s osi X' ili X (vidi sl. 134).

(Sve je računato pomoću logaritamskog računala).



$a = 4{,}21$
$b = 0{,}96$
$\alpha = 55^0\,55'$
$x_0 = 2{,}43$
$y_0 = 4{,}29$

Sl. 134

Primjer 2.

Treba provesti redukciju jednadžbe

$$2{,}8\,x^2 - 4{,}2\,x\,y - 5\,y^2 + 6\,x - 3\,y + 1 = 0$$

i narisati krivulju zadanu tom jednadžbom (sl. 135).

$$A = 2{,}8; \quad B = -2{,}1; \quad C = -5; \quad D = 3; \quad E = -1{,}5; \quad F = 1.$$

$AC - B^2 = -14{,}00 - 4{,}41 = -18{,}41 < 0$ ...hiperbola prema (83).

1) Prema (84):

$$x_0 = \frac{3{,}15 + 15}{-18{,}41} = -\frac{18{,}15}{18{,}41} = -0{,}99$$

$$y_0 = \frac{-6{,}3 + 4{,}2}{-18{,}41} = \frac{-2{,}1}{-18{,}41} = +0{,}11.$$

$S\,(-0{,}99; \quad +0{,}11)$

2) Prema (85):

$$G = 2{,}8 \cdot 0{,}98 + 4{,}2 \cdot 0{,}11 - 5 \cdot 0{,}01 - 6 \cdot 0{,}99 - 3 \cdot 0{,}112 + 1$$

$$G = -2{,}12$$

$$2{,}8\,x'^2 - 4{,}2\,x'\,y' - 5\,y'^2 - 2{,}12 = 0$$

jednadžba hiperbole s obzirom na koordinatni sustav $X'SY'$.

3) Prema (86):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-4{,}2}{7{,}8} = -0{,}54$$

$$2\,\alpha = 180^0 - 28^0\,20' = 151^0\,40'$$

$$\alpha = 75^0\,50'$$

4) Prema (87):

$$\sin\alpha = 0{,}97; \quad \sin^2\alpha = 0{,}94$$

$$\cos\alpha = 0{,}24; \quad \cos^2\alpha = 0{,}06$$

$$\sin 2\alpha = \sin\ 151^0\,40' = \cos 61^0\,40' = 0{,}47$$

$$A' = 2{,}8 \cdot 0{,}06 - 2{,}1 \cdot 0{,}47 - 5 \cdot 0{,}94 = -5{,}52$$

$$C' = 2{,}8 \cdot 0{,}94 + 2{,}1 \cdot 0{,}47 - 5 \cdot 0{,}06 = +3{,}32$$

$G = -2{,}12$ (vidi gore).

$$-5{,}52\,x''^2 + 3{,}32\,y''^2 - 2{,}12 = 0\ /:2{,}12$$

$$-\frac{x''^2}{\dfrac{2{,}12}{5{,}52}} + \frac{y''^2}{\dfrac{2{,}12}{3{,}32}} = 1,$$

ili:

$$-\frac{x''^2}{0{,}38} + \frac{y''^2}{0{,}64} = 1.$$

To je tražena središnja jednadžba hiperbole s obzirom na koordinatni sustav $X''SY''$.

Odatle:

sporedna poluos hiperbole $a = \sqrt{0{,}38} = 0{,}62$

glavna poluos hiperbole $b = \sqrt{0{,}64} = 0{,}80.$

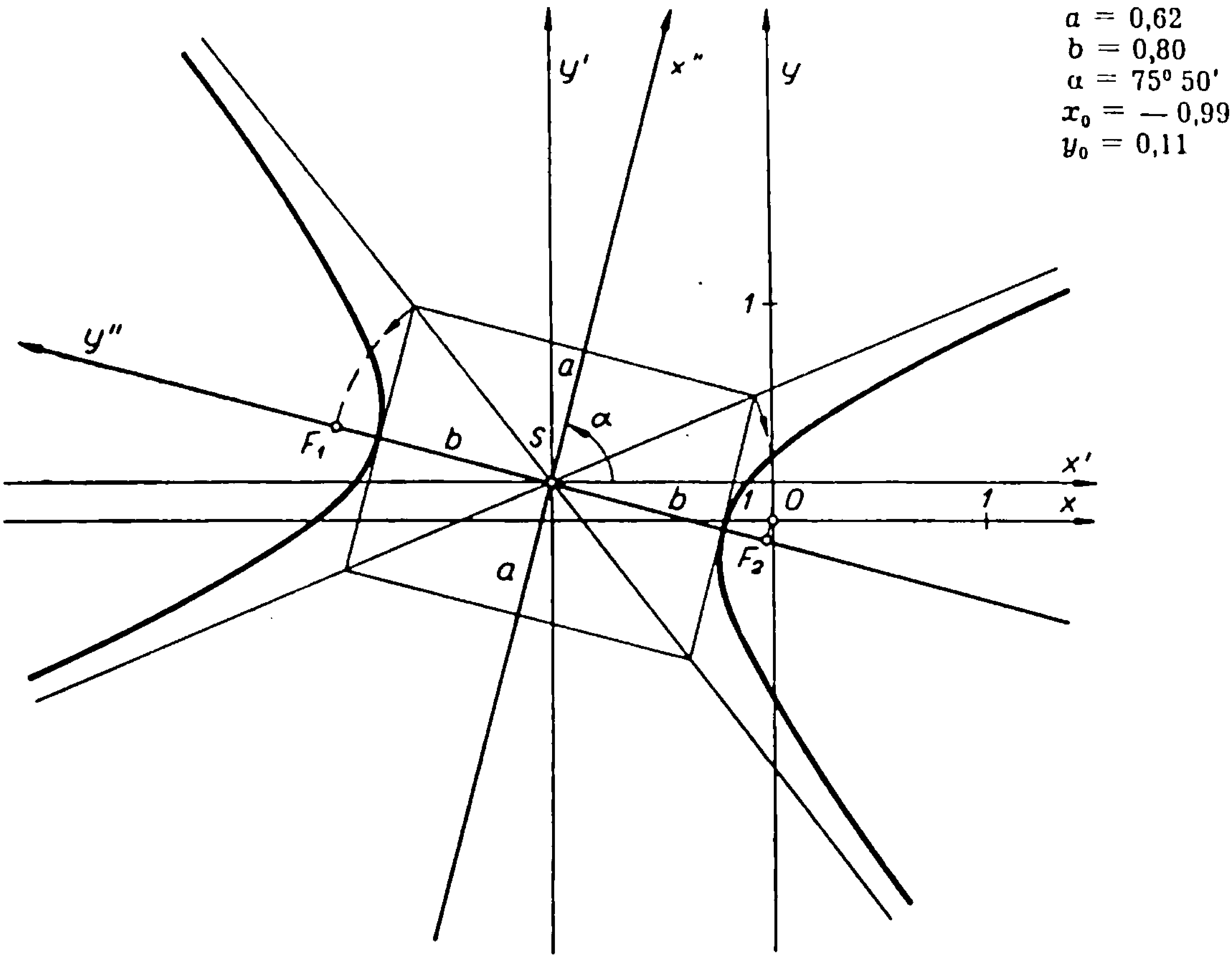
Pokus: Prema (88):

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{-7{,}8 + \sqrt{60{,}84 + 17{,}64}}{-4{,}2} = -0{,}25$$

(uzet je predznak $+$, jer je $G < 0$).

$\alpha_1 = 180^0 - 14^0\,10' = 165^0\,50'$ = kut koji glavna os b hiperbole zatvara s osi X' ili X.

(Vidi sl. 135).



Sl. 135

Primjer 3.

Treba provesti redukciju jednadžbe:

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 + 6x + 9y + 2 = 0$$

i narisati krivulju zadanu tom jednadžbom (sl. 136)!

$$A = 4; \quad B = -6; \quad C = 9; \quad D = 3; \quad E = 4{,}5; \quad F = 2.$$

$AC - B^2 = 36 - 36 = 0$ — parabola prema (83).

1) Prema (89):

$$\operatorname{tg} \alpha = + \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = 0{,}67$$

$$\alpha = 33^\circ 50'.$$

2) Prema (90):

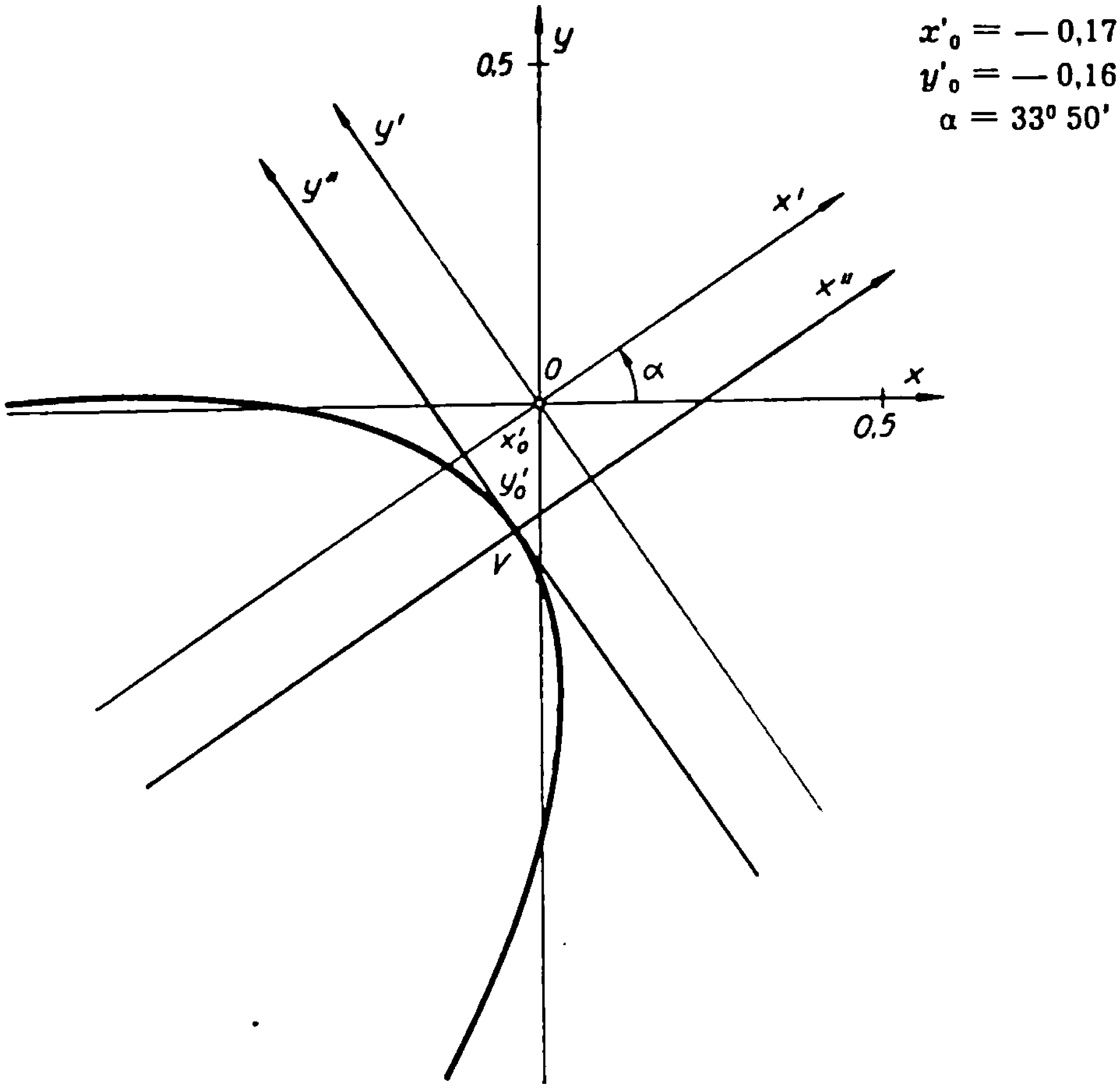
$$\sin \alpha = 0{,}56; \quad \cos \alpha = 0{,}83$$

$$C' = 4 + 9 = 13$$

$$D' = 3 \cdot 0{,}83 + 4{,}5 \cdot 0{,}56 = 5{,}01$$

$$E' = 4{,}5 \cdot 0{,}83 - 3 \cdot 0{,}56 = 2{,}06.$$

$1{,}3\, y'^2 + 10{,}02\, x' + 4{,}12\, y' + 2 = 0$ — jednadžba parabole s obzirom na koordinatni sustav $X'OY'$.



Sl. 136

Prema (91):

$$x'_0 = \frac{2{,}06^2 - 13 \cdot 2}{2 \cdot 13 \cdot 5{,}01} = -0{,}17$$

$$V\ (-0{,}17;\ \ -0{,}16)$$

$$y'_0 = -\frac{2{,}06}{13} = -0{,}16.$$

4) Prema (92):

$$y''^2 = -\frac{2 \cdot 5{,}01}{13} x''$$

$$\underline{y''^2 = -0{,}77x''.}$$

To je tražena vršna jednadžba parabole s obzirom na koordinatni sustav $X''VY''$. (Vidi sl. 136.)

4. OPĆA JEDNADŽBA PRESJEKA STOŠCA U POLARNIM KOORDINATAMA

Ta jednadžba glasi:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \tag{93}$$

Tu je:

p — zadana pozitivna konstanta $\left(\text{poluparametar } p = \frac{b^2}{a}\right)$.

ε — numerički ekscentricitet krivulje.

Prema tome jednadžba predočuje:

za $0 < \varepsilon < 1$ elipsu [vidi (42a)]

za $\varepsilon = 0$ kružnicu [vidi (43)]

za $\varepsilon > 1$ hiperbolu [vidi (61)]

za $\varepsilon = 1$ parabolu [vidi (75)]

Pol koordinatnog sustava nalazi se za elipsu u lijevom, a za hiperbolu u desnom žarištu. Polarna os se podudara s onom osi krivulje na kojoj leže žarišta.

Primjer: Treba narisati krivulju

$$r = \frac{15{,}2}{3 - 1{,}8 \cos \varphi}$$

i izvršiti prijelaz na pravokutni koordinatni sustav!

Da bismo dobili oblik (93), brojnik i nazivnik desne strane podijelimo sa 3

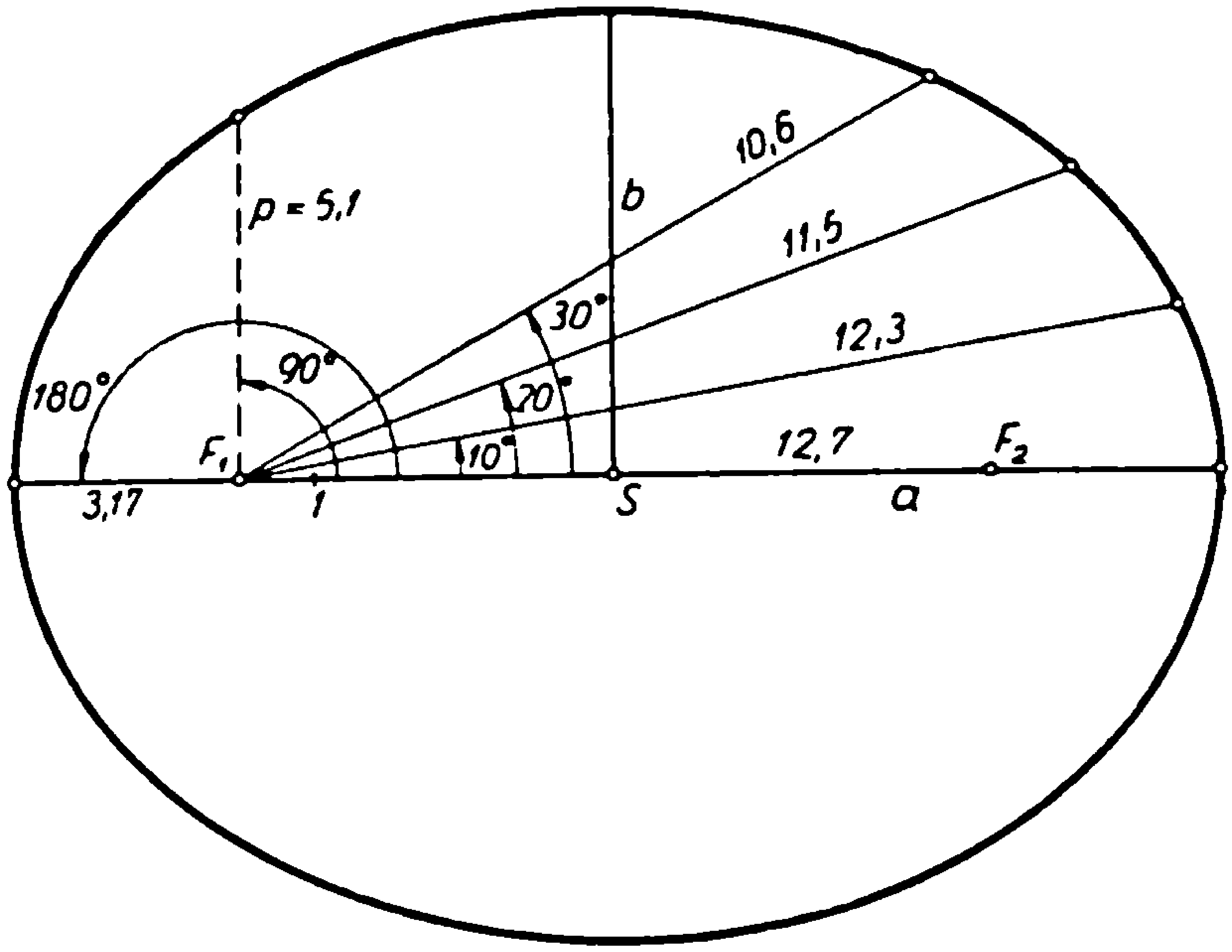
$$r = \frac{5{,}07}{1 - 0{,}6 \cos \varphi}$$

$\varepsilon = 0{,}6 < 1$, dakle elipsa prema (42a).

Računamo pomoću logaritamskog računala jedan stupac za drugim:

φ	$\cos \varphi$	$0{,}6 \cos \varphi$	$1 - 0{,}6 \cos \varphi$	r
0°	+ 1,00	+ 0,60	+ 0,40	+ 12,7
10°	+ 0,98	+ 0,59	+ 0,41	+ 12,3
20°	+ 0,94	+ 0,56	+ 0,44	+ 11,5
30°	+ 0,87	+ 0,52	+ 0,48	+ 10,6
50°	+ 0,64	+ 0,38	+ 0,62	+ 8,2
70°	+ 0,34	+ 0,21	+ 0,79	+ 6,4
90°	+ 0,00	+ 0,00	+ 1,00	+ 5,1
110°	− 0,34	− 0,21	+ 1,21	+ 4,2
130°	− 0,64	− 0,38	+ 1,38	+ 3,7
150°	− 0,87	− 0,52	+ 1,52	+ 3,3
160°	− 0,94	− 0,56	+ 1,56	+ 3,25
170°	− 0,98	− 0,59	+ 1,59	+ 3,19
180°	− 1,00	− 0,60	+ 1,60	+ 3,17
190°	− 0,98	− 0,59	+ 1,59	+ 3,19
200°	− 0,94	− 0,56	+ 1,56	+ 3,25

Dalje se vrijednosti ponavljaju, jer je elipsa simetrična na polarnu os. (Vidi sl. 137)



Sl. 137

Prijelaz na pravokutne koordinate.

Iz slike: 1) $2a = r(0^0) + r(180^0)$ = prema tablici = 12,7 + 3,17 = 15,87.

odatle $a = 7{,}94$; $a^2 = 63{,}04$.

2) $p = r(90^0)$ = prema tablici = 5,1

Prema (44): $p = \dfrac{b^2}{a}$ odatle $b^2 = pa = 40{,}5$; $b = 6{,}36$ i prema (45a)

$\dfrac{x^2}{63{,}04} + \dfrac{y^2}{40{,}5} = 1$ — jednadžba iste elipse u pravokutnom koordinatnom sustavu.

Na isti način izračunavaju se tačke hiperbole i parabole i konstruiraju te krivulje. Dobije li se za r negativna vrijednost, ona se nanosi na pripadnu poluzraku u suprotnu stranu, tj. uzetom polarnom kutu φ dodaje se 180^0.